spé1

le 20/10/99

**série 4:Suites et séries de fonctions**

EXERCICE 1:

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications polynomiales ,convergent uniformément vers $f$ sur $\mathbb{R}$

Montrer que $f$ est polynomiale,la série$\sum \frac{x^n}{n!}$est elle uniformément convergente sur$\mathbb{R}$

EXERCICE 2:

$E$ une algébre normée de dimension finie

Soit $f_n : E \to E$ définie (pour n$\in \mathbb{N}^*$) par :$f_n(x) = e^x - (1_E + \frac{x}{n})^n$

Montrer que $(f_n)$ converge uniformément vers 0 sur tout compact de $E$.

EXERCICE 3:

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite:

$$f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \begin{cases} f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n & \text{si } x \in [0,n] \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

EXERCICE 4:

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de classe $C^1$,$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ .On suppose que:

$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|f_n'(t)\right| \leq M$

Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement alors la convergence est uniforme

EXERCICE 5:

Montrer que S: $x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ , calculer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$

EXERCICE 6:

$D$ une partie d'un evn de dimension finie $E$. $u_n : D \to \mathbb{R}^+, a \in \overline{D}$, on suppose que:

Chaque $u_n$ admet une limite finie $l_n$ quand $x$ tend vers $a$,la série $\sum l_n$ est divregente et que la série $\sum u_n$ est simplement convergente sur$D$.

Montrer que: $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = +\infty$

Application: Calculer $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+n^2x}$

EXERCICE 7:

1)Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}$

2) $a$)Montrer que $f : x \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est définie et continue sur$]0,+\infty[$,la convergence est elle uniforme sur$]0,+\infty[$.

b)Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, en remarquant que $\frac{1}{(2n)^x} - \frac{1}{(2n+1)^x} = x\int_{2n}^{2n+1} \frac{dt}{t^{x+1}}$ calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

EXERCICE 8:

Soit $\alpha \in ]0,\pi[$montrer que la série $\sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ est uniformément convergente sur$[\alpha, 2\pi - \alpha]$

EXERCICE 9:

$(a_n)$ une suite réelle ,telle que la série$\sum a_n$ est convergente.Soit $\alpha \in [0,1[$.

Montrer que la série$\sum a_n x^n$ est uniformément convergente sur $[-\alpha, 1]$

EXERCICE 10:

$E$ une algébre normée de dimension finie

Montrer que la série $\sum_{n\geq 2} (n^2.1_E - x)^{-1}$ est uniformément convergente sur $B_f(0_E, 1)$