Algèbre linéaire
avec Maple

Définitions de matrices et opérations

Pour la constrution de matrice (resp. de vecteurs), généralement on peut utiliser deux syntaxes :

- `matrix(n,m,[liste de coeffs]);` (resp. `vector(n,[liste de coeffs])`)
  par exemple `matrix(2,2,[1,1,2,2]),` les coefficients seront lus ligne par ligne.
- `matrix(n,m,fonction);` (resp. `vector(n,fonction)`)
  par exemple `matrix(2,2,(i,j)->i+j);` qui construit la matrice (2,2) de coefficient générique i+j.

dans les deux cas n et m désignent le nombre de lignes et celui de colonnes. A noter que pour Maple un vecteur est cas particulier d'une matrice.

```
> A:=matrix(3,3,[1,1,1,2,2,2,3,3,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix(3,3,(i,j)->i);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> C:=matrix(3,3,[1,0,-1,0,1,0,1,2,3]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> M:=matrix(3,3,1);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans ce dernier exemple le 1 désigne en fait la fonction constante de valeur 1, d'où le résultat de l'instruction.

On peut accèder au coefficient d'indice (i,j) d'une matrice prédifinie M, en utilisant la syntaxe M[i,j], y compris pour changer sa valeur par affectation

```
> B[3,3];
```

$$3$$

```
> B[3,3]:=0;
```

$$B_{3,\,3} := 0$$

```
> eval(B);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour les opérations algèbriques se font avec + pour l'addition de matrice, &* pour le produit de deux matrices et * pour le produit d'une matrice et d'un scalaire et ^ pour mettre une puissance une matrice, en particulier si une matrice M est inversible M^(-1) désigne son inverse. Contrairement aux variables simples (les nombres les expressions algébriques, ...) il faut demander explicitement l'evaluation d'une matrice avec la procédure evalm.

```
> evalm(2*A+C); evalm(A&*C); evalm(C^(-1));
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Un raccourci interessant : si M est une matrice carrée et a un scalaire quelconque M+a designera pour Maple la somme de M et de la matrice scalaire ayant a comme coeffecient diagonal.

```
> evalm(A-1);evalm(A-x);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 3 & 3 & 3-x \end{bmatrix}$$

```
> U:=matrix(4,4,1);M:=evalm(a-b+b*U);
```

$$U := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M := \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

Les fonctions avancées de l'algèbre linéaire

Pour aller plus loin on doit commencer par charger une bibliothèque (ce que Maple appelle un package) regroupant la plupart des fonctions de l'algèbre linéaire.

```
> with(linalg);
```

[*BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, sumbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian*]

Dès lors on peut :

- Calculer le déterminant d'une matrice avec `det(M);` sa trace avec `trace(M);` son rang avec `rank(M)`, sa transposée avec `transpose(M);`

- Son inverse avec `inverse(M)` ou `evalm(M^(-1));`
- Son polynôme caractéristique avec `charpoly(M,x);` son polynôme minimal avec `minpoly(M,x)` (x désigne le nom de l'indétérminée, peut être quelconque).
- Une base du noyau de M avec `kernel(M);` ou `nullspace(M);`
- Une base de l'image (et donc du sev engendré par les vecteurs colonnes) avec `colspace(M);` ou une base du sev engndré par les vecteurs lignes avec `rowspace(M);`
- tester l'égalité de deux matrices M et N avec `equal(M,N);`
- Résoudre le système linéaire AX=b avec `linsolve(A,b);`
- Les valeurs propres de M avec `eigenvals(M);` (chaque valeur propre est répétée autant de fois que sa multiplicité).
- Déterminer les éléments propres de M par `eigenvects(M);` Maple donne alors les valeurs propres suivies de leurs multiplicités et d'une base du sous espace propre associé.
- l'exponentielle de M avec `exponential(M);`
- La réduite de M par la méthode de Gauss avec `gausselim(M);`
- Le résultat de la concaténation de plusieurs matrices ou vecteurs avec `concat`, très utile pour construire des matrices de passage.

Exemple 1

Une matrice à diagonaliser avec calcul de la matrice de passage et de son inverse et calcul des puissance de A.

```
> A:=matrix(3,3,[58,52,36,-29,187,9,-145,65,219]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 58 & 52 & 36 \\ -29 & 187 & 9 \\ -145 & 65 & 219 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(A);
```

$$\left[116, 1, \left\{\left[\begin{matrix} 4 & 1 & 5 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[174, 2, \left\{\left[\begin{matrix} 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{29}{9} \end{matrix}\right]\right\}\right]$$

La matrice A est diagonalisable.

```
> Vect1:=kernel(A-116);
```

$$Vect1 := \left\{\left[\begin{matrix} 4 & 1 & 5 \end{matrix}\right]\right\}$$

```
> Vect2:=kernel(A-174);
```

$$Vect2 := \left\{\left[\begin{matrix} 0 & 1 & -\frac{13}{9} \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1 & 0 & \frac{29}{9} \end{matrix}\right]\right\}$$

```
> P:=concat(op(Vect1),op(Vect2));
```

$$P := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & \frac{29}{9} & -\frac{13}{9} \end{bmatrix}$$

```
> Di:=evalm(P^(-1)&*A&*P);
```

$$Di := \begin{bmatrix} 116 & 0 & 0 \\ 0 & 174 & 0 \\ 0 & 0 & 174 \end{bmatrix}$$

```
> B:=evalm(P&*diag(116^n,174^n,174^n)&*P^(-1));
```

$$B := \begin{bmatrix} 2\,116^n - 174^n & -\frac{26}{29}\,116^n + \frac{26}{29}\,174^n & -\frac{18}{29}\,116^n + \frac{18}{29}\,174^n \\ \frac{1}{2}\,116^n - \frac{1}{2}\,174^n & -\frac{13}{58}\,116^n + \frac{71}{58}\,174^n & -\frac{9}{58}\,116^n + \frac{9}{58}\,174^n \\ \frac{5}{2}\,116^n - \frac{5}{2}\,174^n & -\frac{65}{58}\,116^n + \frac{65}{58}\,174^n & -\frac{45}{58}\,116^n + \frac{103}{58}\,174^n \end{bmatrix}$$

Exemple 1

Une matrice dépendant d'un paramètre à diagonaliser :

```
> M:=matrix(5,5,[a,0,0,0,b,0,a,0,b,0,0,1,2,1,0,0,b,0,a,0,b,0,0,0,a]);
```

$$M := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
> factor(charpoly(M,x));
```

$$(-2 + x)\,(-b + a - x)^2\,(b + a - x)^2$$

```
> kernel(M-2);
```

$$\{[\,0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,]\}$$

```
> kernel(M-a-b);
```

$$\left\{\left[\,0\ \ \ \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\,a - 1\ \ \ 1\ \ \ \frac{1}{2}\,b + \frac{1}{2}\,a - 1\ \ \ 0\,\right], [\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,]\right\}$$

```
> kernel(M-a+b);
```

$$\{[\,-1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,], [\,0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,]\}$$

En apparence, M est donc toujours diagonalisable, seulement Maple ne fait pas de discusion et pour lui les paramètres a et b sont toujours distincts. Il faudrait donc faire la discusion soit même.

Si a+b=a-b=2, soit b=0 et a=2 :

```
> M1:=subs(b=0,a=2,evalm(M));
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(M1);
```

$$[2, 5, \{[\,0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,], [\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,], [\,0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,], [\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]\}]$$

M1 est non diagonalisable

Si a+b=a-b≠2 soit b=0 mais a≠2

```
> M2:=subs(b=0,evalm(M));
```

$$M2 := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(M2);
```

$$[2, 1, \{[\,0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,]\}], [a, 4, \{[\,0\ \ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\,], [\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\,], [\,0\ \ a-2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\,], [\,1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,]\}]$$

M2 est diagonalisable.

Si a+b=2≠a-b soit b=2-a et b≠0

```
> M3:=subs(b=2-a,evalm(M));
```

$$M3 := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & a & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2-a & 0 & a & 0 \\ 2-a & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(M3);
```

$$\left[2\,a-2, 2, \left\{\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[2, 3, \left\{\left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\right\}\right]$$

M3 n'est pas diagonalisable.

Si a-b=2≠a+b soit b=a-2 et b≠0

```
> M4:=subs(b=a-2,evalm(M));
```

$$M4 := \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & a & 0 & a-2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & 0 & a & 0 \\ a-2 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(M4);
```

$$\left[2\,a-2, 2, \left\{\left[\begin{matrix} 0 & a-2 & 1 & a-2 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\right\}\right], \left[2, 3, \left\{\left[\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right]\right\}\right]$$

M4 est diagonalisable.

Exemple 3

Quelles sont les matrices qui commutent avec la matrice

```
> C:=matrix(3,3,[1,0,0,0,0,a,0,2,3]);
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> X:=matrix(3,3,x);
```

$$X := \begin{bmatrix} x(1,1) & x(1,2) & x(1,3) \\ x(2,1) & x(2,2) & x(2,3) \\ x(3,1) & x(3,2) & x(3,3) \end{bmatrix}$$

```
> M:=evalm(C&*X-X&*C);
```

$$M := \begin{bmatrix} 0 & x(1,2)-2\,x(1,3) & -2\,x(1,3)-x(1,2)\,a \\ a\,x(3,1)-x(2,1) & a\,x(3,2)-2\,x(2,3) & a\,x(3,3)-x(2,2)\,a-3\,x(2,3) \\ 2\,x(2,1)+2\,x(3,1) & 2\,x(2,2)+3\,x(3,2)-2\,x(3,3) & 2\,x(2,3)-a\,x(3,2) \end{bmatrix}$$

```
> eq:=convert(M,set);inc:=convert(X,set);
```

$$eq := \{0, a\,x(3,1)-x(2,1), a\,x(3,2)-2\,x(2,3), x(1,2)-2\,x(1,3), -2\,x(1,3)-x(1,2)\,a, 2\,x(2,1)+2\,x(3,1), 2\,x(2,3)-a\,x(3,2), a\,x(3,3)-x(2,2)\,a-3\,x(2,3), 2\,x(2,2)+3\,x(3,2)-2\,x(3,3)\}$$

$$inc := \{x(1,1), x(1,2), x(1,3), x(2,1), x(2,2), x(2,3), x(3,1), x(3,2), x(3,3)\}$$

```
> sol:=solve(eq,inc);
```

$$sol := \left\{x(1,1) = x(1,1), x(1,2) = 0, x(1,3) = 0, x(2,1) = 0, x(2,2) = -\frac{3}{2}\,x(3,2) + x(3,3), x(2,3) = \frac{1}{2}\,a\,x(3,2),\right.$$
$$\left. x(3,1) = 0, x(3,2) = x(3,2), x(3,3) = x(3,3)\right\}$$

```
> subs(sol,evalm(X));
```

$$\begin{bmatrix} x(1,1) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}\,x(3,2) + x(3,3) & \frac{1}{2}\,a\,x(3,2) \\ 0 & x(3,2) & x(3,3) \end{bmatrix}$$

Exemple 4

Déterminer une racine carrée de la matrice symétrique positive $T = A^t A$ avec

```
> A:=matrix(4,4,[5,-5,-3,3,3,3,-1,-1,-3,3,5,-5,-1,-1,3,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> T:=evalm(A&*transpose(A));
```

$$T := \begin{bmatrix} 68 & 0 & -60 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & -12 \\ -60 & 0 & 68 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(T);
```

$$\left[8, 2, \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[128, 1, \left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \left[32, 1, \left\{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right]$$

```
> P:=concat(op(kernel(T-8)),op(kernel(T-128)),op(kernel(T-32)));
```

$$P := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Di:=evalm(P^(-1)&*T&*P);
```

$$Di := \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}$$

```
> Dic:=map(sqrt,evalm(Di));
```

$$Dic := \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

```
> S:=evalm(P&*Dic&*P^(-1));
```

$$S := \begin{bmatrix} 5\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 & 5\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

```
> equal(S^2,T);
```

$$true$$

Exemple 5

Calcul du rang de la matrice

```
> K:=matrix(3,3,[1,a,b,a,1,b,b,a,1]);
```

$$K := \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & b \\ b & a & 1 \end{bmatrix}$$

```
> rank(K);
```

$$3$$

Encore une fois Maple ne fait de discution. On commence d'abords par déterminer les valeurs particulières de a et b qui rendent K non inversible avec

```
> factor(det(K));
```

$$(-1 + b)(-1 + a)(a + b + 1)$$

On discute maintenant

```
> K1:=subs(a=1,evalm(K));
```

$$K1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(K1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 - b & 1 - b^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le rang est donc 1 si a=b=1, et 2 si a=1 et b≠ 1.

```
> K2:=subs(b=1,evalm(K));
```

$$K2 := \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(K2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le rang est donc 2 si b=1 et a≠1

```
> K3:=subs(b=-a-1,evalm(K));
```

$$K3 := \begin{bmatrix} 1 & a & -a - 1 \\ a & 1 & -a - 1 \\ -a - 1 & a & 1 \end{bmatrix}$$

```
> gausselim(K3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & a & -a-1 \\ 0 & 1-a^2 & -1+a^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si a+b=1, le rang dans est 2 si $a^2 \neq 1$, 1 sinon.
Résumons

- rg(K)=1 si a=b=1 ou (a=1 et b=0) ou (a=-1 et b=0)
- rg(K)=2 si