Exercice 1 : CNC

1 Diagonaliser la matrice (`with(linalg),eigenvects`)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Résoudre alors le système différentiel $X' = AX$

2 Montrer que la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Boujaida Sadik

Exercice 2 : CNC

1 On pose pour $z \in \mathbb{C}$, $\quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $M(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs de z que l'on précisera.

(b) On suppose que $\lambda = e^{it}$ est une valeur propre de $M(z)$. Calculer z en fonction de t et tracer la courbe $t \mapsto z(t)$.

2 Étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n}$$

.

Boujaida Sadik

Exercice 3 : CNC

1 On considère la fonction définie sur $D = [-1, 1]^2$, $f : x \mapsto x^2 + xy - y^2$.

(a) Déterminer les points critiques de f dans D

(b) Déterminer les extrémums de f dans D

2 On se donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Montrer que la matrice A est diagonalisable, et chercher une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.(`with(linalg),eigenvects`).
Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Boujaida Sadik

Exercice 4 : CNC

1 On considère la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n 2^n}$.

(a) Justifier soigneusement la convergence de cette série.

(b) Montrer que sa somme est $\ln(3/2)$ et donner une majoration du reste.

(c) Donner une valeur approche 10^{-9} près de $\ln(3/2)$

2 On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 & -5 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Calculer $T = A^tA$.
Justifier sans calcul que T est diagonalisable.
Diagonaliser T dans uns base orthonormale.

Boujaida Sadik

Exercice 5 : CNC

1 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carres d'ordre n, et soit $A \in \mathcal{M}$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.
On pose $G(M) = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}$.

(a) Montrer que G est un endomorphisme de $\mathcal{M}$ est en donner un polynôme annulateur.

(b) En déduire que G est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

(c) On pose ici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$ et déterminer les sous espaces propres de G.

2 Étudier l'intégrabilité sur $I =]0, +\infty[$ de la fonction : $x \to \dfrac{\sin(x)}{x + x^2}$

Boujaida Sadik

Exercice 6 : CNC

1 Soit (u_n) une suite de fonctions définies de A vers $\mathbb{R}_+$ telle que : $\forall x \in A :\ (u_n(x))_n$ est décroissante.
Montrer que $\sum (-1)^n u_n$ CVU sur A ssi la suite de fonctions (u_n) CVU vers 0 sur A.

2 Résoudre sur chacun des intervalles : $]-2, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $x(x+2)y' + (x+1)y = 1$ et déterminer les solutions définies sur $]-2, +\infty[$. (`dsolve`)

Boujaida Sadik

Exercice 7 : CNC

1 Développer en série de Fourier l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodique, paire et telle que $f(x) = 1 - \dfrac{2x}{\pi}$ si $x \in [0, \pi]$.(`int`)

2 En déduire : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

Boujaida Sadik

Exercice 8 : CNC

1 Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t = 0,\ x-y+z-t = 0\}$ former dans la base canonique la matrice de la symétrie orthogonale autour de F.

2 a, b, c, d tant des réels avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$ on pose

$$u_n = \sin\left(\frac{a}{\sqrt{n+b}}\right) - \tan\left(\frac{c}{\sqrt{n+d}}\right)$$

Calculer un développement asymptotique de deux termes de u_n (`taylor, series`), en déduire une CNS pour que la série $\sum u_n$ converge.

Boujaida Sadik

Exercice 9 : CCP

1 soit U_n une suite à termes positifs, montrez que si U_{n+1}/U_n converge vers une limite L tq $0 < L < 1$ alors la série de terme général U_n converge, puis la 2éme question était une simple application numérique de la 1er question dont je me rappelle plus de l'expression de U_n

2 soit E un ev euclidien de dimension ¿=3,et a, b 2 éléments de E tel que la famille (a, b) soit libre soit f un endo de E tq : $f(x) = (a.x)a - (b.x)b$ il s'agit de Mq que f autoadjoint de déterminer, kerf , imf et leurs dimensions , les valeurs propres et vecteurs propres et les dimensions des sous espaces propres associés

Rq : 1-temps de préparation est 25 min et puis 30 min a tableau 2-pour l'application numérique on peux la faire au brouillon,puis juste écrire le résultat sur tableau pour ne pas perdre du temps Cordialement

Basri Othmane

Exercice 10 : CNC

1 On munit $E = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire : $(f.g) = 1/2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.
a)Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale
b)Déterminer par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).
c) Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F (on pourra utiliser Maple)

J'ai eu deux exercices comme choix le premier contenait des équations différentielles qui ont pour solution des séries entières mais j'ai choisi celui là Pour Maple c'était très simple j'ai fait un simple calcul d'intégrale On a une demi heure pour réfléchir à l'exercice, une demi heure pour la résolution Il faut au moins répondre aux questions de cours, il faut aussi expliquer ce que vous écrivez au tableau, et si vous arrivez à résoudre tout les exercices vous n'auriez pas beaucoup de question de cour.

E Berrahoui Fadwa

Exercice 11 : CNC

1 question de cours : montrer que dans un banach, une série absolument convergente est convergente.
exo : on nous a donné une matrice N (1ere colonne : 0 a b 2eme colonne : a 0 c 3eme colonne : b c 0) cette matrice est-t-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? et dans $M_3(\mathbb{C})$?

2 soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$ tel que a appartient à $\mathbb{R}$.
1) montrer que cette fonction est bien définie.
2) montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et que quelque soit n appartient à N la derivée n ième de la fonction est inférieur à 1/1+a (ou bien 1/1-a je me souviens pas très bien car je ne l'ai po travaillé j'ai choisi l'autre exo)

3 (c'est obligatoire), sur maple
1) écrire d'abord une matrice de 3*3
2) calculer son rang son ker, est-t-elle diagonalisable ? trigonalisable ?

Benayad Iman