Exercices oraux (MP)
Concours National Marocain 2008

Mamouni My Ismail

CPGE MedV, Casablanca, Maroc
www.chez.com/myismail
mamouni.myismail@gmail.com
Tel. 065 98 58 58

3 juillet 2008

Table des matières

- J'ai classé les exercices en 3 niveaux :
  - Niveau I : facile.
  - Niveau II : moyen.
  - Niveau III : difficile.
- L'élève aura à choisir deux exercices dans le même niveau ou des niveau différentes.
- Aprés 5 minutes, il doit se decider quel exercice il va préparer parmi les deux exercices choisis.
- La durée de préparation est de 25 minutes. Le temps de réponses au tableau est de 30 minutes, dans lesquelles l'élève doit répondre à l'exercice choisi, un autre exercice que je lui propose sur place, des questions de cours, et des questions sur Maple©.
- Si l'élève répond correctement à l'exercice choisi, je lui propose un autre de niveau supérieur.
- Si l'élève n'est pas convaincant dans sa réponse correctement à l'exercice choisi, je lui propose un autre de niveau inférieur.
- Cette démarche me permet de situer le nivau de l'élève et de lui attribuer une note sur 8 points de la façon suivante :
  - Niveau I : entre 0 et 4 points sur 8.
  - Niveau I : entre 4 et 6 points sur 8.
  - Niveau I : entre 6 et 8 points sur 8.
- Les questions de cours sont notés sur 8 points, ceux de Maple© sur 4 points.

1 Niveau 1

1.1 Algèbre-géométrie

Exercice 1.1.1 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(On s'intéressera à la réduction de A)

Exercice 1.1.2 Soit z_0 un complexe, et (z_n) une suite telle que $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$.

1. Donner une construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Etudier la convergence de la suite (z_n).
   Indication : on écrira $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$,où $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}_+^\times \times] - \pi, \pi[$ et on utilisera :

$$\sin \phi = 2^n \sin \frac{\phi}{2^n} \prod_{i=1}^{n} \cos \frac{\phi}{2^i}.$$

3. Trouver une courbe simple passant par tous les points de la suite, et construire cette courbe.

Exercice 1.1.3 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
3. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A

Exercice 1.1.4 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ $(a \neq 0)$.

1. Trouver trois vecteurs V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$AV_1 = -V_1, \ AV_2 = V_1 - V_2, \ AV_3 = V_2 - V_3$$

   En déduire que A est semblable à une matrice simple que l'on explicitera
2. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer $\exp xA = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$.

Exercice 1.1.5 Soit A_n la matrice $(\min(i, j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de A_n sont réelles et que A_n est diagonalisable
2. On définit $B_n = (b_{i,j})$ par

$$\begin{array}{lcl} \forall i & \in & \{1, .., n-1\} \quad b_{i,i} = 2 \text{ et } b_{n,n} = 1 \\ \forall i & \in & \{1, n-1\} \quad b_{i,i+1} = -1, \quad \forall i \in \{2, n\} \quad b_{i,i-1} = -1 \end{array}$$

   tous les autres coefficients étant nuls.
   Evaluer le produit $A_n B_n$. Conclusion
3. Quelle est la valeur de $\det A_n$?
4. Quelles sont les valeurs propres de B_n ? En déduire les valeurs propres de A_n.
5. La matrice A_n est-elle définie positive ?

Exercice 1.1.6 Soit $P(x) = \det \begin{pmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P(a_1), .., P(a_n)$.
2. Etudier $\dfrac{P(X)}{(X-a_1)..(X-a_n)}$ et en déduire $P(x)$

1.2 Analyse

Exercice 1.2.1 Soit $\alpha > 0$; on pose $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^{\alpha}$.

1. Trouver un équivalent de a_n
   Indication : On pourra découper la somme selon les pairs et les impairs
2. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{a_n}$.

Exercice 1.2.2 On pose $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer f'
2. Exprimer f' à l'aide de fonctions usuelles.
3. En déduire f

Exercice 1.2.3 Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(\frac{x}{3}) - f(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0.$$

Que dire si g est C^1 à dérivée bornée ?

Exercice 1.2.4 Soit l'équation différentielle $x^2 y" - 6xy' + (12 + x^2) y = 0$.
En trouver les solutions développables en série entière, puis toutes les solutions.

Exercice 1.2.5 On pose $I = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} \sin ax \, dx$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer I comme somme d'une série.
2. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f telle que $f(x) = e^{ax}$ sur $[0, 2\pi[$.
3. En déduire I.

2 Niveau 2

2.1 Algèbre-géométrie

Exercice 2.1.1 Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n. Soit A une matrice de $\mathcal{M}$ vérifiant : $A^2 - 5A + 6I_n = 0$.

1. On pose $G(M) = AM$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   (a) Montrer que G est diagonalisable.
   (b) Etudier les éléments propres de G
2. On pose $D(M) = MA$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   Etudier les éléments propres de D
3. On pose $F(M) = AM + MA$ pour toute M de $\mathcal{M}$.
   Etudier les éléments propres de F.

Exercice 2.1.2 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B commutent.
2. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$ à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{3}{2} \end{pmatrix}$
3. Montrer que l'espace vectoriel engendré par A et B est un corps. Quel est l'inverse de $aA + bB$?

Exercice 2.1.3

1. Exemple de matrice A de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$ telle que $A^3 = 2I$?
   (On supposera qu'il existe un vecteur x tel que (x, Ax, A^2x) est une base de $\mathbb{Q}^3$
2. Soit A une telle matrice. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$. On note E l'ensemble des $aI + bA + cA^2$ où a, b, c parcourent $\mathbb{K}$. Selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$, E est-il un corps ?

Exercice 2.1.4 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le commutant de A et l'ensemble :
$$\{B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) : \quad \exists X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA\}$$
2. Généralisation : si $\mathcal{C}(A)$ est le commutant de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$\exists X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \quad B = AX - XA \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{C}(A), \quad tr(BM) = 0$$
   Indication : poser $\Phi_A(M) = AM - MA$ et penser au produit scalaire : $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$

Exercice 2.1.5 On pose, pour $z \in \mathbb{C}$, $\quad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $M(z)$ est diagonalisable sauf pour deux valeurs que l'on déterminera.
2. On suppose que $\lambda = e^{it}$ est une valeur propre de $M(z)$. Calculer z en fonction de t et tracer la courbe $t \mapsto z(t)$.
3. Montrer que la suite (M^n) tend vers 0 pour $|z|$ assez petit.

Exercice 2.1.6 Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Prouver que $\det A > 0$.

Exercice 2.1.7 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il existe P orthogonale telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} soient diagonales.

Exercice 2.1.8 Soit (Γ) la parabole d'équation $y^2 = 2px$ $(p > 0)$.

1. Si $M(x, 0)$, avec $x \geqslant 0$, montrer qu'il existe un unique point $M'(x', 0)$ avec $x' > x$ tel que le carré dont une diagonale est MM' ait ses deux sommets sur (Γ). Expliciter $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $f(x) = x'$.
2. Soit alors $x_0 \geqslant 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Montrer que $x_n \to +\infty$ et donner un développement asymptotique à deux termes de (x_n).

Exercice 2.1.9 Quelles sont les matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

2.2 Analyse

Exercice 2.2.1 Soit $\varphi \in C^0(([0,1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 + \frac{x}{n}\varphi(\frac{k}{n})).$$

1. Montrer que (f_n) converge simplement et expliciter sa limite simple.
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.2.2 Montrer que : $\int\limits_0^1 x^{-x}\, dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

Exercice 2.2.3 Convergence de la série de terme général (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{1}{(n+p)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 2.2.4 On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$.
Défintion de f; mode de convergence de la série définition f; limite en $+\infty$ de f ; équivalent de f de 0.

Exercice 2.2.5

1. Montrer que $\int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2} dx = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k+1+t}$ pour $t \geqslant 0$.
   En déduire $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2} dx$. Soit l sa limite.
2. Equivalent de $\int\limits_0^1 \dfrac{x^t}{1+x^2} dx - l$ quand t tend vers 0.

Exercice 2.2.6 Equivalent, lorsque $n \to +\infty$, de $(2^2 3^3 .. n^n)^{4/n^2}$

Exercice 2.2.7 Soit $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to 0\}$.
Pour $u \in E$, on pose $\|u\|_\infty \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$, et $f(u) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_n}{2^n}$.

1. Vérifier que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E. On munit E de $\|.\|_\infty$.
2. Montrer que f est une forme linéaire continue sur E, et que $|||f||| = 1$.
3. Existe-t-il $u \in E$ tel que $\|u\|_\infty \leqslant 1$ et $|f(u)| = 1$?
   En déduire que $\overline{B} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \|u\|_\infty \leqslant 1\}$ n'est pas compacte.

Exercice 2.2.8 Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2x \int_0^x f(t)\cos(x-t)dt = 1$$

(On commencera par montrer que f est C^1)

Exercice 2.2.9 Trouver un équivalent simple de $\sum\limits_{i \geqslant 1, j \geqslant 1, i+j=n} \dfrac{1}{ij}$.

Exercice 2.2.10 Soit $r > 0$ et E_r l'ensemble des applications de $]-r,r[$ dans $\mathbb{R}$ développable en série entière. Pour f dans E, on pose $\phi(f)(x) = \int\limits_0^x \dfrac{f(t)}{x+t}\, dt$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E_r.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ; ϕ est-il un automorphisme de E_r ?
3. Pour P polynôme on pose $\|P\| = \sup\limits_{t \in [-1,1]} |P(t)|$; ϕ induit-elle une application continue sur $\mathbb{R}[t]$? Son inverse est-elle continue ?

Exercice 2.2.11 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{n} \\ \dfrac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$

3 Niveau 3

3.1 Algèbre-géométrie

Exercice 3.1.1 Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) &\to \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX + XB. \end{aligned}$$

Trouver les valeurs propres de Φ en fonction de celles de A et B.
(On pourra commencer par traiter les cas $A = 0$ puis le cas $B = 0$ et enfin traiter le cas général)

Exercice 3.1.2 Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$. Pour $a_1, .., a_n \in E$, on pose

$$\delta_n(a_1, .., a_n) = \left(\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(a_i, a_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

puis

$$d_n(E) = \sup_{(a_1, .., a_n) \in E} \delta_n(a_1, .., a_n).$$

Que dire que de $d_n(E)$ suivant que E est borné ou non borné ? Si $E \subset F$, comparer $d_n(E)$ et $d_n(F)$. Etudier la suite $(d_n(E))_{n \in \mathbb{N}}$ et en particulier sa monotonie. Calculer $d_3(E)$ lorsque E est un segment.

Exercice 3.1.3 Pour quelles valeurs de n existe-t-il un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$?

Exercice 3.1.4 Soient u, v deux vecteurs indépendants de l'espace euclidien E de dimension 3.

1. Montrer qu'il existe n unitaire tel que (n, u, v) soit libre et

$$< n, u >< n, v >=< u, v > .$$

2. Montrer qu'il existe un projecteur orthogonal P tel que :

$$P(u) \neq 0, \quad P(v) \neq 0 \quad < P(u), P(v) >= 0$$

Exercice 3.1.5 Soit E un espace vectoriel de dimension 3, $\beta = (i, j, k)$ une base de E. On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $v \in E$, on note $W(v) = Vect\{f^k(v), \quad k \in \mathbb{N}\}$.

Trouver les vecteurs $v \in E$ tels que $W(v) \neq E$ lorsque la matrice A de f dans la base β est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

3.2 Analyse

Exercice 3.2.1 Déterminer toutes les applications f C^1 et 2π-périodiques telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x).$$

Exercice 3.2.2 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto 2x(1-x)$. Soit K un compact de $]0,1[$.
On pose $f_n = f \circ f \circ .. \circ f$ (n fois). Etudier la convergence de la suite (f_n) sur K.
On admet le théorème de Stone-Weierstrass : toute application continue d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes.
Montrer que toute application continue définie sur $[a,b] \subset]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme, sur $[a,b]$, d'une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}^\times$, fixé. On pose $\Delta = \inf\limits_{(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 + x_1 t + ..x_n t^n)^2 dt$.

1. Etablir l'existence et l'unicité de $(a_1, .., a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + ..a_n t^n)^2 dt$$

   On pose alors $F(X) = \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{a_1}{X+2} + .. + \dfrac{a_n}{X+n+1}$.
2. Calculer $F(k)$ pour $k = 1, .., n$.
3. Calculer $F(0)$.
4. En déduire Δ et $(a_1, .., a_n)$.

Exercice 3.2.4 Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ et $M_Q = \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}$ la matrice de Q dans la base canonique.

1. Conditions sur a, b, c pour que Q soit positive (resp. définie positive). Que peut-on dire de l'ensemble : $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ Q \text{ positive}\}$?
2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset K$. Soit $C = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 ;\ Q$ positive et $K \subset E_Q\}$ où $E_Q = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ Q(x) \leqslant 1\}$.
   Montrer que C est compact.
3. Montrer qu'il existe un disque elliptique centré en 0 et un seul d'aire minimale et contenant K.

Exercice 3.2.5 Soit

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} n^2 a_n^2 < +\infty\} \\ H_0 &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} a_n^2 < +\infty\} \\ H_{-1} &= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n^2}{n^2} < +\infty\}. \end{aligned}$$

1. Définir des produits scalaires sur les H_i et montrer qu'ils sont complets pour les normes associées.
2. Pour $b = (b_n) \in H_{-1}$, montrer que $\Lambda_b : H_1 \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ est une forme linéaire sur H_1, quelle est sa norme ? Réciproque ?
3. Montrer que la boule unité de H_1 est une partie compacte de H_0.

Exercice 3.2.6

1. Calculer $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times ...$
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$, pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3.2.7 Soit $n \in \mathbb{N}^\times$ et $\alpha \in]0,1[$. On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme subordonnée à la norme hermitienne canonique de $\mathbb{C}^n$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ contenu dans la boule $B'(I_n, \alpha)$.

1. Que peut-on dire des valeurs propres d'un élément A de G ?
2. Que peut-on dire de G ?
3. Le résultat subsiste-t-il en prenant un intervalle plus grand pour α ?

Exercice 3.2.8 Soit $r \in]0,1[$. On définit une suite (u_n) de réels par :

$$0 < u_0 \leqslant u_1 \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que (u_n) converge dans $\mathbb{R}$. Soit $l(r)$ la limite.
2. Equivalent de $u_n - l(r)$?

Exercice 3.2.9 Résoudre $\left\{ \begin{array}{c} xy' + |y| = 2(x^2 - 4) \\ y(1) = 1. \end{array} \right.$