

# Exercices oraux (MP)

## Concours National Marocain 2008

Mamouni My Ismail

CPGE MedV, Casablanca, Maroc

[www.chez.com/myismail](http://www.chez.com/myismail)

[mamouni.myismail@gmail.com](mailto:mamouni.myismail@gmail.com)

Tel. 065 98 58 58

3 juillet 2008

### Table des matières

<b>1 Niveau 1</b>	<b>2</b>
1.1 Algèbre-géométrie . . . . .	2
1.2 Analyse . . . . .	3
<b>2 Niveau 2</b>	<b>4</b>
2.1 Algèbre-géométrie . . . . .	4
2.2 Analyse . . . . .	5
<b>3 Niveau 3</b>	<b>7</b>
3.1 Algèbre-géométrie . . . . .	7
3.2 Analyse . . . . .	8

- J’ai classé les exercices en 3 niveaux :
  - Niveau I : facile.
  - Niveau II : moyen.
  - Niveau III : difficile.
- L’élève aura à choisir deux exercices dans le même niveau ou des niveau différentes.
- Après 5 minutes, il doit se décider quel exercice il va préparer parmi les deux exercices choisis.
- La durée de préparation est de 25 minutes. Le temps de réponses au tableau est de 30 minutes, dans lesquelles l’élève doit répondre à l’exercice choisi, un autre exercice que je lui propose sur place, des questions de cours, et des questions sur Maple<sup>©</sup>.
- Si l’élève répond correctement à l’exercice choisi, je lui propose un autre de niveau supérieur.
- Si l’élève n’est pas convaincant dans sa réponse correctement à l’exercice choisi, je lui propose un autre de niveau inférieur.
- Cette démarche me permet de situer le niveau de l’élève et de lui attribuer une note sur 8 points de la façon suivante :
  - Niveau I : entre 0 et 4 points sur 8.
  - Niveau I : entre 4 et 6 points sur 8.
  - Niveau I : entre 6 et 8 points sur 8.
- Les questions de cours sont notés sur 8 points, ceux de Maple<sup>©</sup> sur 4 points.

# 1 Niveau 1

## 1.1 Algèbre-géométrie

**Exercice 1.1.1** Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(On s'intéressera à la réduction de  $A$ )

**Exercice 1.1.2** Soit  $z_0$  un complexe, et  $(z_n)$  une suite telle que  $z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + |z_n|)$ .

1. Donner une construction géométrique de  $z_{n+1}$  à partir de  $z_n$ .
2. Etudier la convergence de la suite  $(z_n)$ .

*Indication* : on écrira  $z_n = \rho_n e^{i\phi_n}$ , où  $(\rho_n, \phi_n) \in \mathbb{R}_+^\times \times ]-\pi, \pi[$  et on utilisera :

$$\sin \phi = 2^n \sin \frac{\phi}{2^n} \prod_{i=1}^n \cos \frac{\phi}{2^i}.$$

3. Trouver une courbe simple passant par tous les points de la suite, et construire cette courbe.

**Exercice 1.1.3** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?

2. Montrer que  $A$  est semblable à  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice  $A$

**Exercice 1.1.4** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  ( $a \neq 0$ ).

1. Trouver trois vecteurs  $V_1, V_2, V_3$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que

$$AV_1 = -V_1, \quad AV_2 = V_1 - V_2, \quad AV_3 = V_2 - V_3$$

En déduire que  $A$  est semblable à une matrice simple que l'on explicitera

2. Calculer  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Calculer  $\exp xA = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n A^n}{n!}$ .

**Exercice 1.1.5** Soit  $A_n$  la matrice  $(\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Montrer que toutes les valeurs propres de  $A_n$  sont réelles et que  $A_n$  est diagonalisable
2. On définit  $B_n = (b_{i,j})$  par

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n-1\} \quad b_{i,i} &= 2 \text{ et } b_{n,n} = 1 \\ \forall i \in \{1, n-1\} \quad b_{i,i+1} &= -1, \quad \forall i \in \{2, n\} \quad b_{i,i-1} = -1 \end{aligned}$$

tous les autres coefficients étant nuls.

Evaluer le produit  $A_n B_n$ . Conclusion

3. Quelle est la valeur de  $\det A_n$  ?
4. Quelles sont les valeurs propres de  $B_n$  ? En déduire les valeurs propres de  $A_n$ .
5. La matrice  $A_n$  est-elle définie positive ?

**Exercice 1.1.6** Soit  $P(x) = \det \begin{pmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $P(a_1), \dots, P(a_n)$ .
2. Etudier  $\frac{P(X)}{(X - a_1) \dots (X - a_n)}$  et en déduire  $P(x)$

## 1.2 Analyse

**Exercice 1.2.1** Soit  $\alpha > 0$ ; on pose  $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^\alpha$ .

1. Trouver un équivalent de  $a_n$   
*Indication : On pourra découper la somme selon les pairs et les impairs*
2. Etudier la nature de la série de terme général  $\frac{1}{a_n}$ .

**Exercice 1.2.2** On pose  $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$ .

1. Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $f'$
2. Exprimer  $f'$  à l'aide de fonctions usuelles.
3. En déduire  $f$

**Exercice 1.2.3** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue. trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{3}\right) - f(x) = g(x) \text{ et } f(0) = 0.$$

Que dire si  $g$  est  $C^1$  à dérivée bornée ?

**Exercice 1.2.4** Soit l'équation différentielle  $x^2 y'' - 6xy' + (12 + x^2)y = 0$ .  
En trouver les solutions développables en série entière, puis toutes les solutions.

**Exercice 1.2.5** On pose  $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} \sin ax \, dx$  où  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Exprimer  $I$  comme somme d'une série.
2. Développer en série de Fourier la fonction  $2\pi$ -périodique  $f$  telle que  $f(x) = e^{ax}$  sur  $[0, 2\pi[$ .
3. En déduire  $I$ .

## 2 Niveau 2

### 2.1 Algèbre-géométrie

**Exercice 2.1.1** Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre  $n$ . Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}$  vérifiant :  $A^2 - 5A + 6I_n = 0$ .

- On pose  $G(M) = AM$  pour toute  $M$  de  $\mathcal{M}$ .
  - Montrer que  $G$  est diagonalisable.
  - Etudier les éléments propres de  $G$
- On pose  $D(M) = MA$  pour toute  $M$  de  $\mathcal{M}$ .  
Etudier les éléments propres de  $D$
- On pose  $F(M) = AM + MA$  pour toute  $M$  de  $\mathcal{M}$ .  
Etudier les éléments propres de  $F$ .

**Exercice 2.1.2** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Montrer que  $A$  et  $B$  commutent.

- Montrer que  $A$  et  $B$  sont semblables sur  $\mathbb{R}$  à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

- Montrer que l'espace vectoriel engendré par  $A$  et  $B$  est un corps. Quel est l'inverse de  $aA + bB$ ?

### Exercice 2.1.3

- Exemple de matrice  $A$  de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{Q})$  telle que  $A^3 = 2I$ ?  
(On supposera qu'il existe un vecteur  $x$  tel que  $(x, Ax, A^2x)$  est une base de  $\mathbb{Q}^3$ )
- Soit  $A$  une telle matrice. Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Q}$ . On note  $E$  l'ensemble des  $aI + bA + cA^2$  où  $a, b, c$  parcourent  $\mathbb{K}$ .  
Selon que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Q}$ ,  $E$  est-il un corps?

**Exercice 2.1.4** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer le commutant de  $A$  et l'ensemble :

$$\{B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) : \exists X \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}), B = AX - XA\}$$

- Généralisation : si  $\mathcal{C}(A)$  est le commutant de la matrice  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que :

$$\exists X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), B = AX - XA \Leftrightarrow \forall M \in \mathcal{C}(A), \operatorname{tr}(BM) = 0$$

Indication : poser  $\Phi_A(M) = AM - MA$  et penser au produit scalaire :  $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$

**Exercice 2.1.5** On pose, pour  $z \in \mathbb{C}$ ,  $M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $M(z)$  est diagonalisable sauf pour deux valeurs que l'on déterminera.
- On suppose que  $\lambda = e^{it}$  est une valeur propre de  $M(z)$ . Calculer  $z$  en fonction de  $t$  et tracer la courbe  $t \mapsto z(t)$ .
- Montrer que la suite  $(M^n)$  tend vers 0 pour  $|z|$  assez petit.

**Exercice 2.1.6** Soit  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 = A + I_n$ . Prouver que  $\det A > 0$ .

**Exercice 2.1.7** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Montrer qu'il existe  $P$  orthogonale telle que  $PAP^{-1}$  et  $PBP^{-1}$  soient diagonales.

**Exercice 2.1.8** Soit  $(\Gamma)$  la parabole d'équation  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ).

1. Si  $M(x, 0)$ , avec  $x \geq 0$ , montrer qu'il existe un unique point  $M'(x', 0)$  avec  $x' > x$  tel que le carré dont une diagonale est  $MM'$  ait ses deux sommets sur  $(\Gamma)$ . Expliciter  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $f(x) = x'$ .
2. Soit alors  $x_0 \geq 0$ , et  $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ .  
Montrer que  $x_n \rightarrow +\infty$  et donner un développement asymptotique à deux termes de  $(x_n)$ .

**Exercice 2.1.9** Quelles sont les matrices de  $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  ?

## 2.2 Analyse

**Exercice 2.2.1** Soit  $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$f_n(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{x}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

1. Montrer que  $(f_n)$  converge simplement et expliciter sa limite simple.
2. Y-a-t-il convergence uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}$  ? sur  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice 2.2.2** Montrer que :  $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$ .

**Exercice 2.2.3** Convergence de la série de terme général  $(u_n)$  définie par  $u_n = \sum_{p=0}^n \frac{1}{(n+p)^\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ .

**Exercice 2.2.4** On pose  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ .

Définition de  $f$ ; mode de convergence de la série définition  $f$ ; limite en  $+\infty$  de  $f$ ; équivalent de  $f$  de 0.

**Exercice 2.2.5**

1. Montrer que  $\int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1+t}$  pour  $t \geq 0$ .

En déduire  $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx$ . Soit  $l$  sa limite.

2. Équivalent de  $\int_0^1 \frac{x^t}{1+x^2} dx - l$  quand  $t$  tend vers 0.

**Exercice 2.2.6** Équivalent, lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , de  $(2^2 3^3 \dots n^n)^{4/n^2}$

**Exercice 2.2.7** Soit  $F = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tel que } u_n \rightarrow 0\}$ .

Pour  $u \in E$ , on pose  $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ , et  $f(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$ .

1. Vérifier que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$ . On munit  $E$  de  $\|\cdot\|_\infty$ .
2. Montrer que  $f$  est une forme linéaire continue sur  $E$ , et que  $\|f\| = 1$ .
3. Existe-t-il  $u \in E$  tel que  $\|u\|_\infty \leq 1$  et  $|f(u)| = 1$  ?  
En déduire que  $\overline{B} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \|u\|_\infty \leq 1\}$  n'est pas compacte.

**Exercice 2.2.8** Trouver toutes les fonctions continues  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) - 2x \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt = 1$$

(On commencera par montrer que  $f$  est  $C^1$ )

**Exercice 2.2.9** Trouver un équivalent simple de  $\sum_{i \geq 1, j \geq 1, i+j=n} \frac{1}{ij}$ .

**Exercice 2.2.10** Soit  $r > 0$  et  $E_r$  l'ensemble des applications de  $] -r, r[$  dans  $\mathbb{R}$  développable en série entière.

Pour  $f$  dans  $E$ , on pose  $\phi(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{x+t} dt$ .

1. Montrer que  $\phi$  est un endomorphisme de  $E_r$ .
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $\phi$ ;  $\phi$  est-il un automorphisme de  $E_r$ ?
3. Pour  $P$  polynôme on pose  $\|P\| = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$ ;  $\phi$  induit-elle une application continue sur  $\mathbb{R}[t]$ ? Son inverse est-elle continue?

**Exercice 2.2.11** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{n} \\ \frac{\alpha}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$

### 3 Niveau 3

#### 3.1 Algèbre-géométrie

**Exercice 3.1.1** Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  et :

$$\begin{aligned}\Phi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX + XB.\end{aligned}$$

Trouver les valeurs propres de  $\Phi$  en fonction de celles de  $A$  et  $B$ .

(On pourra commencer par traiter les cas  $A = 0$  puis le cas  $B = 0$  et enfin traiter le cas général)

**Exercice 3.1.2** Soit  $E$  une partie de  $\mathbb{R}^2$ . Pour  $a_1, \dots, a_n \in E$ , on pose

$$\delta_n(a_1, \dots, a_n) = \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} d(a_i, a_j) \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

puis

$$d_n(E) = \sup_{(a_1, \dots, a_n) \in E} \delta_n(a_1, \dots, a_n).$$

Que dire de  $d_n(E)$  suivant que  $E$  est borné ou non borné? Si  $E \subset F$ , comparer  $d_n(E)$  et  $d_n(F)$ . Etudier la suite  $(d_n(E))_{n \in \mathbb{N}}$  et en particulier sa monotonie. Calculer  $d_3(E)$  lorsque  $E$  est un segment.

**Exercice 3.1.3** Pour quelles valeurs de  $n$  existe-t-il un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  isomorphe à  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^2$ ?

**Exercice 3.1.4** Soient  $u, v$  deux vecteurs indépendants de l'espace euclidien  $E$  de dimension 3.

1. Montrer qu'il existe  $n$  unitaire tel que  $(n, u, v)$  soit libre et

$$\langle n, u \rangle \langle n, v \rangle = \langle u, v \rangle.$$

2. Montrer qu'il existe un projecteur orthogonal  $P$  tel que :

$$P(u) \neq 0, \quad P(v) \neq 0 \quad \langle P(u), P(v) \rangle = 0$$

**Exercice 3.1.5** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3,  $\beta = (i, j, k)$  une base de  $E$ . On se donne  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $v \in E$ , on note  $W(v) = \text{Vect}\{f^k(v), \quad k \in \mathbb{N}\}$ .

Trouver les vecteurs  $v \in E$  tels que  $W(v) \neq E$  lorsque la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $\beta$  est  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Même question avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

### 3.2 Analyse

**Exercice 3.2.1** Déterminer toutes les applications  $f \in C^1$  et  $2\pi$ -périodiques telles que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$2f(x+1) = f(x) + f(2x).$$

**Exercice 3.2.2** Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : x \mapsto 2x(1-x)$ . Soit  $K$  un compact de  $]0, 1[$ .

On pose  $f_n = f \circ f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois). Etudier la convergence de la suite  $(f_n)$  sur  $K$ .

On admet le théorème de Stone-Weierstrass : toute application continue d'un segment  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  est limite uniforme, sur  $[a, b]$ , d'une suite de fonctions polynômes.

Montrer que toute application continue définie sur  $[a, b] \subset ]0, 1[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est limite uniforme, sur  $[a, b]$ , d'une suite de fonctions polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 3.2.3** Soit  $n \in \mathbb{N}^\times$ , fixé. On pose  $\Delta = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 + x_1 t + \dots + x_n t^n)^2 dt$ .

1. Etablir l'existence et l'unicité de  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + \dots + a_n t^n)^2 dt$$

On pose alors  $F(X) = \frac{1}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \dots + \frac{a_n}{X+n+1}$ .

2. Calculer  $F(k)$  pour  $k = 1, \dots, n$ .
3. Calculer  $F(0)$ .
4. En déduire  $\Delta$  et  $(a_1, \dots, a_n)$ .

**Exercice 3.2.4** Soit  $Q$  une forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  et  $M_Q = \begin{pmatrix} c+a & b \\ b & c-a \end{pmatrix}$  la matrice de  $Q$  dans la base canonique.

1. Conditions sur  $a, b, c$  pour que  $Q$  soit positive (resp. définie positive). Que peut-on dire de l'ensemble :  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; Q \text{ positive}\}$  ?
2. Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que  $B(0, r) \subset K$ . Soit  $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; Q \text{ positive et } K \subset E_Q\}$  où  $E_Q = \{x \in \mathbb{R}^2; Q(x) \leq 1\}$ .  
Montrer que  $C$  est compact.
3. Montrer qu'il existe un disque elliptique centré en 0 et un seul d'aire minimale et contenant  $K$ .

**Exercice 3.2.5** Soit

$$H_1 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n \geq 1} n^2 a_n^2 < +\infty\}$$

$$H_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n \geq 1} a_n^2 < +\infty\}$$

$$H_{-1} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}^\times} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^\times} / \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2}{n^2} < +\infty\}.$$

1. Définir des produits scalaires sur les  $H_i$  et montrer qu'ils sont complets pour les normes associées.
2. Pour  $b = (b_n) \in H_{-1}$ , montrer que  $\Lambda_b : H_1 \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$  est une forme linéaire sur  $H_1$ , quelle est sa norme ? Réciproque ?
3. Montrer que la boule unité de  $H_1$  est une partie compacte de  $H_0$ .

**Exercice 3.2.6**

1. Calculer  $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \dots$

2. Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\theta}{2^n}$ , pour  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

**Exercice 3.2.7** Soit  $n \in \mathbb{N}^\times$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ . On munit  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$  de la norme subordonnée à la norme hermitienne canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Soit  $G$  un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$  contenu dans la boule  $B'(I_n, \alpha)$ .

1. Que peut-on dire des valeurs propres d'un élément  $A$  de  $G$  ?
2. Que peut-on dire de  $G$  ?
3. Le résultat subsiste-t-il en prenant un intervalle plus grand pour  $\alpha$  ?

**Exercice 3.2.8** Soit  $r \in ]0, 1[$ . On définit une suite  $(u_n)$  de réels par :

$$0 < u_0 \leq u_1 \text{ et } u_{n+2} = u_{n+1} + r^n u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que  $(u_n)$  converge dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $l(r)$  la limite.
2. Equivalent de  $u_n - l(r)$  ?

**Exercice 3.2.9** Résoudre  $\begin{cases} xy' + |y| = 2(x^2 - 4) \\ y(1) = 1. \end{cases}$