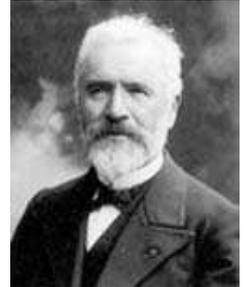


☒ Corrigé Pr. Dufait, CPGE France

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?  
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).
- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un polytechnicien (1855) fils de polytechnicien (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Mathématicien du jour

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de  $f$  est un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .
2.  $J_f$  est un idéal de  $\mathbb{R}[X]$  (et accessoirement un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$ ).
3. Si  $J_f \neq \{0\}$ , le polynôme minimal de  $f$  est l'unique polynôme unitaire  $\pi_f$  tel que  $J_f = \pi_f \cdot \mathbb{R}[X]$ . C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à  $J_f$  de plus petit degré.
4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $J_f \neq \{0\}$  puisque le polynôme caractéristique de  $f$ ,  $\chi_f$  appartient à  $J_f$ .

5. 1. On a  $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$  donc  $M^2 = M$  et donc, par récurrence,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^k = M$ .

2. Ainsi  $X^2 - X \in J_f$  donc  $\pi_f \mid X^2 - X = X(X - 1)$  et donc  $\pi_f \in \{X, X - 1, X^2 - X\}$  (1 n'est pas annulateur si  $E \neq \{0\}$ ). Or  $M \neq 0$  et  $M \neq I_4$  donc  $\pi_f = X^2 - X$ .

6.1.  $\diamond$  L'équation homogène  $y'' + y = 0$  est à coefficients constants et a pour équation caractéristique  $X^2 + 1 = 0$  donc les solutions sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de  $y'' + y = 0$  sont les fonctions  $x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x)$  pour  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

Comme  $\text{ch}'' = \text{ch}$ , une solution particulière de  $y'' + y = \text{ch}(x)$  est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{2}\text{ch}(x)$  donc les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + y = \text{ch}(x)$  sont les  $y : x \mapsto \frac{1}{2}\text{ch}(x) + A \cos(x) + B \sin(x)$  pour  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

$\diamond$  De même, les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $y'' + y = \text{sh}(x)$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{2}\text{sh}(x) + A \cos(x) + B \sin(x)$  pour  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

Puisque  $f$  est supposée de classe  $C^4$  sur  $\mathbb{R}$  alors  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$  et donc :

$$\begin{aligned} (f \text{ solution de } (H_1)) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) = f(x)) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4)}(x) + f''(x) = f(x) + f''(x)) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, g''(x) = g(x)) \end{aligned}$$

donc  $(f \text{ solution de } (H_1)) \iff (g = f'' + f \text{ solution de } y'' = y)$ .

$\S(H_2) : y'' - y = 0$  est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique  $X^2 - 1 = 0$  donc a pour solutions les fonctions  $x \mapsto A e^x + B e^{-x}$  avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ , ou aussi, les solutions de  $(H_2)$  sont les  $y : x \mapsto A \text{ch}(x) + B \text{sh}(x)$  pour  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ .

Le principe de superposition des solutions et les résultats de la question [6.1] donnent : les solutions de  $(H_1)$  sont les  $y : x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + C \text{ch}(x) + D \text{sh}(x)$  avec  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ .

1. Par définition de  $E$ , la famille  $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$  en est génératrice. De plus, si  $A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh} = 0$  alors, en dérivant deux fois,  $-A \cos - B \sin + C \text{ch} + D \text{sh} = 0$  donc  $A \cos + B \sin = 0$  et  $C \text{ch} + D \text{sh} = 0$ . En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient  $A = B = C = D = 0$  donc cette famille est libre etc'est donc une base de  $E$ . Ainsi  $\dim(E) = 4$ .

2. La dérivation est linéaire et  $(A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh})' = -A \sin + B \cos + C \text{sh} + D \text{ch} \in E$  donc  $E$  est stable. Donc la dérivation induit bien un endomorphisme de  $E$ .

3. D'après [6.4],  $E$  est l'ensemble des solutions de  $(H_1)$  donc  $\forall y \in E, y^{(4)} = \delta^4(y) = y$ . Ainsi

$X^4 - 1 \in J_\delta$  et  $\pi_\delta \mid X^4 - 1$ . Si  $\pi_\delta \neq X^4 - 1$  alors  $\deg(\pi_\delta) \leq 3$  donc  $\pi_\delta = \sum_{i=0}^3 a_i X^i$ . On alors

$$\begin{aligned} \forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad 0 &= \pi_\delta(\delta) [A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh}] \\ &= \sum_{i=0}^3 a_i [A \cos + B \sin + C \text{ch} + D \text{sh}]^{(i)} \\ &= ((a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B) \cos + ((a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A) \sin \\ &\quad + ((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D) \text{ch} + ((a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C) \text{sh} \end{aligned}$$

donc, par liberté de  $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ ,

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} (a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B = 0 \\ (a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A = 0 \\ (a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D = 0 \\ (a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C = 0 \end{cases}$$

soit  $a_0 = a_2 = -a_0$  et  $a_1 = a_3 = -a_1$  donc  $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$  ce qui est absurde. Donc  $\pi_\delta = X^4 - 1$ .

### Problme

#### Partie I

1. On a  $\dim(E_n) = n + 1$  et une base est  $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

2.  $\diamond \forall P \in E, u(P) = P' \in E$  et  $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, u(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)' = P' + \lambda Q' = u(P) + \lambda u(Q)$  donc  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

De plus, si  $\deg(P) \neq 0, \deg(P') = \deg(P) - 1$  et si  $\deg(P) = 0, \deg(P') = -\infty$  donc  $u(E_n) \subset E_n$ .

$\diamond$  Si  $P \neq 0$  et  $\deg(P) = d$  avec  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  avec  $a_d \neq 0$  alors  $v(P) = \sum_{k=0}^d a_k (X + 1)^k =$

$$\sum_{k=0}^d a_k (X^k + kX^{k-1} + \dots) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \dots \text{ donc } v(E_n) \subset E_n.$$

On a donc  $\forall P \in E, v(P) \in E$  et  $\forall (P, Q) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, v(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X + 1) = P(X + 1) + \lambda Q(X + 1) = v(P) + \lambda v(Q)$  donc  $v \in \mathcal{L}(E)$ .

3.  $\diamond u(1) = 0$  et  $\forall k \in \mathbb{N}^*, u(X^k) = kX^{k-1}$  donc  $U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

$$\diamond \forall k \in \mathbb{N}, v(X^k) = (X + 1)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} X^i \text{ donc } V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \vdots & \vdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

4.  $\diamond P' = 0$  si et seulement si  $P$  est constant donc  $\underline{\text{Ker}(u_n) = E_0}$  et  $\text{Im}(u_n) = \text{Vect}(u_n(1), u_n(X), \dots, u_n(X^n)) = \text{Vect}(0, 1, \dots, nX^{n-1})$  donc  $\underline{\text{Im}(u_n) = E_{n-1}}$ .  
 $\diamond \det(v_n) = \det(V_n) = 1 \neq 0$  donc  $v_n$  est un automorphisme de  $E_n$  et donc  $\underline{\text{Ker}(v_n) = \{0\}}$  et  $\underline{\text{Im}(v_n) = E_n}$ .
5. On a  $\forall P \in E, u \circ v(P) = (P(X+1))' = P'(X+1) = v \circ u(P)$  donc  $\underline{u_n \text{ et } v_n \text{ commutent}}$ .
6.  $\diamond \chi_{u_n} = \chi_{U_n}$  donc  $\underline{\chi_{u_n} = X^{n+1}}$ .  $\diamond$  Donc 0 est valeur propre de multiplicité  $n+1$  et l'espace propre associé est  $E_0(u_n) = \text{Ker}(u_n) = E_0 \neq E_n$  car  $n \in \mathbb{N}^*$  donc  $\underline{u_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$ .
7.  $\diamond \chi_{v_n} = \chi_{V_n}$  donc  $\underline{\chi_{v_n} = (X-1)^{n+1}}$ .  $\diamond$  Donc  $\text{Sp}(v_n) = \{1\}$  et donc si  $v_n$  était diagonalisable sa matrice dans une base de diagonalisation serait  $I_{n+1}$  et ceci serait vrai dans toute base donc  $\underline{v_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$ .
8. On a  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \deg(Q_k) = k$  donc la famille  $(Q_k)_{0 \leq k \leq n}$  est une famille de degrés étagés donc  $\underline{(Q_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } E_n}$ .

2.  $w_n(Q_0) = v_n(Q_0) - Q_0 = Q_0 - Q_0$  donc  $\underline{w_n(Q_0) = 0}$ .

$$\begin{aligned} w_n(Q_k) &= v_n(Q_k) - Q_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=-1}^{k-2} (X-j) - \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) [(X+1) - (X-k+1)] \\ &= \frac{k}{k!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) = \frac{1}{(k-1)!} \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \end{aligned}$$

et, pour  $k = 1, w_n(Q_1) = (X +$

1)  $- X = 1 = Q_0$  donc  $\underline{\forall k \text{ sup } 1, w_n(Q_k) = Q_{k-1}}$ .

$$\mathfrak{W}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

On lit sur la matrice  $W_n : \text{rg}(W_n) = n, Q_0 \in \text{Ker}(w_n), \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, Q_k \in \text{Im}(w_n)$  donc  $\underline{\text{Ker}(w_n) = \mathbb{R} \cdot Q_0}$  et  $\underline{\text{Im}(w_n) = \text{Vect}(Q_k)_{0 \leq k \leq n-1}}$ .

On a, par récurrence sur  $j, w_n^j(Q_k) = \begin{matrix} Q_{k-j} & \text{si } j \leq k \\ 0 & \text{si } j > k \end{matrix}$

9. Puisque  $\mathcal{B}$  est une base de  $E_n$ ,  $\forall P \in E_n$ ,  $\exists !(\beta_k)_{0 \leq k \leq n}$ ,  $P = \sum_{k=0}^n \beta_k Q_k$ .

On a  $w_n^j(P) = \sum_{k=0}^n \beta_k w_n^j(Q_k) = \sum_{k=j}^n \beta_k Q_{k-j}$  si  $j \leq n$ ,

0 si  $j > n$ . De plus,  $Q_i(0) = 1$  si  $i = 0$ , 0 si  $i > 0$ .

Donc  $w_n^j(P)(0) = \beta_j$  si  $j \leq n$ , 0 si  $j > n$ .

Ainsi  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\beta_k = w_n^k(P)(0)$ . Or  $w_n^k = (v_n - e_n)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_n^j$  car  $v_n$  et  $e_n$  commu-

tent. Et, par récurrence facile,  $v_n^j(P)(X) = P(X + j)$  donc  $w_n^k(P)(X) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(X + j)$ .

En évaluant en 0, on obtient donc  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\beta_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$ .

Et donc la base duale de  $\mathcal{B}$  est  $\mathcal{B}^* = (Q_k^*)_{0 \leq k \leq n}$  avec  $Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(j)$ .

10.  $\diamond$  Selon la question [8.5],  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $w_n^{n+1}(Q_k) = 0$  donc  $w_n^{n+1} = \theta_n$ .  
 $\diamond$  De la même question on tire  $w_n^n(Q_n) = Q_0$ .

### Partie II

1. Le théorème de Cayley-Hamilton donne  $\chi_f \in J_f$  donc  $\pi_f \mid \chi_f$ .
2. On a, par récurrence sur  $k$ ,  $\forall P \in E$ ,  $u^k(P) = P^{(k)}$ . Or, si  $P \in E_n$  alors  $\deg(P) < n + 1$  donc  $P^{(n+1)} = 0$ . Ainsi  $u_n^{n+1} = \theta_n$ .  
 De même,  $u_n^n(X^n) = n!$  (en dérivant  $n$  fois).  
 Selon [1],  $u_n^{n+1} = \theta_n$  donc  $X^{n+1} \in J_{u_n}$  donc  $\pi_{u_n} \mid X^{n+1}$  et donc  $\exists m \leq n + 1$ ,  $\pi_{u_n} = X^m$ . Si on avait  $m \leq n$  alors  $\pi_{u_n} \mid X^n$  donc  $u_n^n = \theta_n$  mais ceci est faux selon [2]. Finalement,  $\pi_{u_n} = X^{n+1}$ .  
 Selon [I.10],  $w_n^{n+1} = \theta_n$  et  $w_n^n \neq \theta_n$  donc, comme ci-dessus,  $\pi_{w_n} = X^{n+1}$ .
3.  $\chi_{v_n} \mid \chi_{v_n} = \chi_{v_n} = (X - 1)^{n+1}$  donc  $\exists m \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$ ,  $\pi_{v_n} = (X - 1)^m$ .

Donc  $(v_n - e_n)^m = \theta_n$  soit  $w_n^m = \theta_n$  donc  $\pi_{w_n} \mid X^m$  et donc, vu le résultat de [2.4],  $m = n + 1$ .

4. Puisque  $\deg(P) = m$ , on a  $a_m \neq 0$ .

$$2. \left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m a_j u^j \left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} u^j (X^m) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} (X^m)^{(j)} = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} m(m-1)\cdots(m-j+1) X^{m-j}$$

$$1) X^{m-j} = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{m!} \frac{m!}{(m-j)!} X^{m-j} \text{ donc } r \left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^m \frac{a_j}{(m-j)!} X^{m-j}.$$

Ainsi  $r \left(\frac{X^m}{m!}\right) \neq 0$  donc  $r \neq \theta$  donc  $\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}, P(u) \neq \theta$  donc  $J_u = \{0\}$ .

5. Soit  $P \in J_v$ , on a  $P(v) = \theta$  donc, par restriction à  $E_n$  stable par  $v$ ,  $P(v_n) = \theta_n$  donc  $\pi_{v_n} \mid P$ . Ceci donne bien, avec le résultat de [3.2],  $\forall n \in \mathbb{N}^*, (X-1)^{n+1} \mid P$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists Q_n \in E, P = (X-1)^{n+1} Q_n$  donc  $\deg(P) = n+1 + \deg(Q_n)$ . En prenant  $\sup \deg(P)$ , ceci donne  $\deg(Q_n) = -\infty$  donc  $P = 0$ . Donc  $J_v = \{0\}$ .

6. Soit  $Q = s(P)$  et  $R = s^2(P)$ , on a  $R(X) = Q(1-X) = P(1-(1-X)) = P(X)$  donc  $s^2 = e$  ( $s$  involution).

On a donc  $X^2 - 1 \in J_s$  et donc  $J_s \neq \{0\}$ . Ainsi  $s$  a un polynôme minimal  $\pi_s$  et  $\pi_s \in \{X+1, X-1, X^2-1\}$ . Or  $s \neq e$  car  $s(X) = 1-X \neq X$  et, de même,  $s \neq -e$  donc  $\pi_s = X^2 - 1$  et  $J_s = (X^2 - 1) \cdot \mathbb{R}[X]$ .

### Partie III

1.  $\exp(u_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m}{m!} = \sum_{m=0}^n \frac{u_n^m}{m!}$  d'après [II.2.1]. On peut donner deux démonstrations de l'égalité demandée :

• **Première démonstration :**

Montrons que  $\exp(u_n)$  et  $v_n$  coïncident sur la base canonique  $(X^k)_{0 \leq k \leq n}$  :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \begin{cases} v_n(X^k) &= (X+1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} X^{k-j} \\ \exp(u_n)(X^k) &= \sum_{m=0}^n \frac{u_n^m(X^k)}{m!} = \sum_{m=0}^k \frac{k!}{m!(k-m)!} X^{m-k} \text{ selon [II.4.2]} \end{cases}$$

et donc  $v_n = \exp(u_n)$ .

• **Deuxième démonstration :**

La formule de Taylor en  $X$  appliquée à  $P \in E$  donne  $P(X + h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} h^m$ . En prenant  $h = 1$ , on obtient  $P(X + 1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m(P)}{m!}$  soit  $v_n = \exp(u_n)$ .

2. D'après [I.9.3],  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^n w_n^j(u_n(Q_k))(0) Q_j$ . Or  $u_n$  et  $v_n$  commutent ([I.5]) donc  $u_n$  et  $w_n = v_n - e_n$  également donc  $w_n^j(u_n(Q_k)) = u_n(w_n^j(Q_k)) = u_n(Q_{k-j})$  si  $j \leq k$ .  
 $= u_n(0)$  si  $j > k$  d'après ([I.8.5]). Ceci donne  $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^k u_n(Q_{k-j})(0) Q_j$  soit
- 
- $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^k u_n(Q_m)(0) Q_{k-m}$ .



E3A, 2008, MP, Mathématiques AÁ la prochaine