Contrôle 1 Algèbre Linéaire

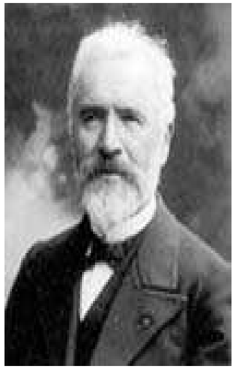
Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

✔ Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.
L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
✔ Chaque résultat énoncé doit être justifié en citant précisent le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précédente utilisée.
✔ Les résultats numériques importants doivent être simplifiés et encadrés.
✔ Les calculs doivent être détailles et expliqués à l'aide de phrases simples.
✔ Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.
✔ Numéroter les doubles feuilles de la façon suivante : 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total des doubles feuilles.
✔ Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.
✔ Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).

- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Mathématicien du jour

Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un poyltechnicien (1855) fils de polytechnicie (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Énoncé

Partie I : Noyaux et images itérés.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $\dim E = n$.

① **a** Montrer que la suite $\left(\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion) et que la suite $\left(\operatorname{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b Montrer que les suites $\left(\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left(\operatorname{Im}(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir d'un même rang p.

c Montrer que $\ker(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p) = E$.

② Soit $k \in \mathbb{N}$, montrer que :

a $\ker f^k = \ker f^{k+1} \Longrightarrow \ker f^{k+1} = \ker f^{k+2}$

b $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1} \Longrightarrow \operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2}$

③ **a** Soit F un sous-espace vectoriel de E, montrer que $\ker f_{|F} = \ker f \cap F$ et $\operatorname{Im}_{|F} = f(F)$.

b Montrer que $f(\ker(f^{k+1})) \subset \ker(f^k)$.

c En déduire que : $\dim\ker f^{k+1} \leq \dim\ker f^k + \dim\ker f, \forall k \in \mathbb{N}$.

☞ Indication : Écrire la formule du rang pour $f_{|F}$ où $F = \ker(f^{k+1})$.

④ Montrer que la suite $\left(\dim(\ker(f^{k+1})) - \dim(\ker(f^k))\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

☞ Indication : Prendre G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f^{k+1}$ dans $\operatorname{Im} f^k$ et montrer que $\operatorname{Im} f^{k+1} = \operatorname{Im} f^{k+2} + f(G)$

Partie II : Endomorphisme nilpotent.

On considère dans cette partie $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice de nilpotence p, donc $f^{p-1} \neq 0$ et $f^p = 0$.

① Soit $x \in E \setminus \ker f^{p-1}$. Montrer que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

② En déduire que si $p \leq n$, et que $f^n = 0$.

③ Montrer que $\operatorname{rg}(f) \leq n-1$.

④ On suppose dans cette question que $p = n$.

a Montrer que $\operatorname{rg} f = n-1$

b Montrer que $\dim\ker f^k = k, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$.

☞ Indication : Utiliser la question ③ de la partie I.

c En déduire que $\ker f^k = \operatorname{Im} f^{n-k}, \forall k \in \{0, \ldots, n\}$.

☞ Indication : On rappelle le résultat suivant, si $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fg = 0$, alors $\operatorname{Im} g \subset \ker f$.

⑤ On suppose dans cette question que $p = n-1$.

a Montrer que $\forall k \in \{1, \ldots, n-2\}$, on a :

i $\dim(\ker f^k) \geq k$.

☞ Indication : On pourra raisonner par récurrence.

ii $\dim(\ker f^k) \leq k+1$.

☞ Indication : On pourra raisonner par récurrence descendante.

b On suppose que $\exists k \in \{1,\dots,n-2\}$ tel que $\dim(\ker f^k) = k$ et $\dim(\ker f^{k+1}) = k+2$.

i Montrer que $\dim(\ker f^k) \geq \dim(\ker f^{k-1}) + 2$.

ii En déduire une contradiction, puis conclure.

Partie III : Opérateur des différences finies.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on pose $\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

① Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P)$,

② En déduire que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, Préciser son rang.

③ Montrer que $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$. En déduire que Δ est nilpotent.

④ On pose $L_0(X) = 1$, $L_1(X) = X$, $L_k(X) = \dfrac{X(X-1)\cdots(X-(k-1))}{k!}$ pour tout $2 \leq k \leq n-1$.

a Montrer que $\Delta L_k = L_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

b Que vaut $\Delta^k L_{n-1}$?

⑤ En déduire que Δ est l'indice de nilpotence de Δ est égal à $n-1$.

⑥ En déduire que $\ker \Delta^{n-k} = \operatorname{Im} \Delta^k = \mathbb{R}_{n-k-1}[X]$.

⑦ $\Delta^m P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} P(X+k)$.

☛ Indication : Remarquer que $\Delta = \mathcal{T} - id$ où $\mathcal{T}(P)(X) = P(X+1)$

⑧ Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$

Fin

Bonne Chance

Corrigé, Pr. Mamouni, CPGE My Youssef, Rabat

Partie I : Noyaux et images itérés.

① **a** Classique et facile.

b La suite $\left(\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, donc la suite $\left(\dim\ker(f^k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par $\dim E$, donc converge, or elle est à valeur dans $\mathbb{Z}$, donc stationnaire (*), donc $\exists p\in\mathbb{N}$; tel que $\dim\ker(f^k)=\dim\ker(f^p)$ $\forall k\geq p$, or $\ker(f^k)\subset\ker(f^p)$ $\forall k\geq p$, d'où l'égalité. D'après la formule du rang, on a $\dim \mathrm{Im}\,(f^k)=\dim\mathrm{Im}\,(f^p)$ $\forall k\geq p$, or $\mathrm{Im}\,(f^p)\subset\mathrm{Im}\,(f^p)$ $\forall k\geq p$, d'où l'égalité.

(*) : Montrons le résultat suivant : Toute suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Z}$ convergente, est stationnaire. En effet : pour $\varepsilon=\frac{1}{2}0$, $existsp\in\mathbb{N}$ tel que $\forall k\geq p$, on a $|x_k-x_p|\leq\frac{1}{2}$, or $|x_k-x_p|\in\mathbb{N}$ donc nul.

c D'après la formule du rang, on a $\dim\ker(f^p)+\dim\mathrm{Im}\,(f^p)=\dim E$, comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\ker f^p\cap\mathrm{Im}\,f^p=0$. En effet, $f^p(x)=0$ et $x=f^p(x')\Longrightarrow f^{2p}(x')=f^p(x)=0$, d'où $x'\in\ker f^{2p}=\ker f^p$, ce qui signifie $x=f^p(x')=0$.

② $x\in f(\ker(f^{k+1}))\Longrightarrow x=f(x')$ tel que $f^{k+1}(x')=x$, donc $f^k(x)=f^{k+1}(x')=0$.

③ Soit $k\in\mathbb{N}$, montrer que :

a On a déjà $\ker f^{k+1}\subset\ker f^{k+2}$, Inversement $x\in\ker f^{k+2}\Longrightarrow f^{k+1}(f(x))=0\Longrightarrow f(x)\in\ker f^{k+1}=\ker f^k\Longrightarrow f^k(f(x))=f^{k+1}(x)=0$.

b On a déjà $\mathrm{Im}\,f^{k+2}\subset\mathrm{Im}\,f^{k+1}$, Inversement $x\in\mathrm{Im}\,f^{k+1}\Longrightarrow\exists x\in E$; tel que $x=f(f^k)(x')$, or $f^k(x')\in\mathrm{Im}\,f^k=\mathrm{Im}\,f^{k+1}$, donc $\exists x''\in E$; tel que $f^k(x')=f^{k+1}(x'')$, donc $x=f^{k+2}(x'')\in\mathrm{Im}\,f^{k+2}$.

④ $\ker f_{|F}=\ker f\cap F$ et $\mathrm{Im}\,_{|F}=f(F)$ (facile, utiliser juste les définition, cette propriété, bien que très simple, elle est très utile)

⑤ La formule du rang pour $f_{|F}$ où $F=\ker(f^{k+1})$, s'écrit : $\dim\ker(f^{k+1})=\dim\left(\ker(f^{k+1})\cap\ker f\right)+\dim\left(f(\ker(f^{k+1}))\right)\leq\dim\ker f+\dim\ker f^k$ car $\ker f\subset\ker f^{k+1}$ et $f(\ker f^{k+1})\subset\ker f^k$.

⑥ Soit G tel que $\mathrm{Im}\,f^k=\mathrm{Im}\,f^{k+1}\oplus G$, donc $\mathrm{Im}\,f^{k+1}=f(\mathrm{Im}\,f^k)=f(\mathrm{Im}\,f^{k+1})+f(G)=\mathrm{Im}\,f^{k+2}+f(G)$. En passant aux dimensions, on obtient : $\dim\mathrm{Im}\,f^{k+1}=\dim\mathrm{Im}\,f^{k+2}+\dim f(G)-\dim\mathrm{Im}\,f^{k+1}\cap f(G)\leq\dim\mathrm{Im}\,f^{k+2}+\dim f(G)$. Moyennant la formule du rang, on obtient : $\dim\ker f^{k+2}-\dim\ker f^{k+1}\leq\dim f(G)\leq\dim G=\dim\mathrm{Im}\,f^k-\dim\mathrm{Im}\,f^{k+1}=\dim\ker f^{k+1}-\dim\ker f^k$.

Partie II : Endomorphisme nilpotent.

① Supposons $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$, on compose une fois par f^{p-1}, puis par f^{p-2} et ainsi de suite pour montrer que $\lambda_0 = 0$, puis $\lambda_1 = 0$ et ainsi de suite.

② La famille précédente est libre, donc de cardinal $p \leq n = \dim E$. Or $f^p = 0$, d'où $f^n = 0$.

③ On a $f^p(x) = 0$, donc $f^{p-1}(x) \in \ker f$ or $f^{p-1}(x) \neq 0$, donc $\dim \ker f \geq 1$, d'où $\mathrm{rg}(f) \leq n-1$.

④ **a** La famille $(f(x), \cdots, f^{p-1}(x))$ de cardinal $p-1 = n-1$ est libre comme sous-famille d'une famille libre, or ses éléments appartiennent tous à $\mathrm{Im}\, f$, donc $n-1 \leq \dim Imaf = \mathrm{rg} f \leq n = \dim E$. Or f n'est pas bijective (car $f^{p-1}(x) \neq 0$ et $f^{p-1}(x) \in \ker f \neq 0$), donc $\mathrm{rg} f \neq n$, d'où $\mathrm{rg} f = n-1$.

b Montrer par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, n\}$ que $\dim \ker f^k = k$.
En effet, pour $k = 0$ le résultat est évidement vérifié.
Supposons maintenant que $\dim \ker f^k = k$, d'après la question ③ de la partie I, on a $\dim \ker f^k = k \leq \dim \ker f^{k+1} \leq \dim \ker f^k + \dim \ker f = k+1$. Or $\dim \ker f^k < \dim \ker f^{k+1}$ car la suite des noyaux itérés ne devienne stationnaire qu'à partir de $p = n$, donc $\dim \ker f^{k+1} = k+1$.

c On a $f^n = f^k f^{n-k} = 0$, donc $\mathrm{Im}\, f^{n-k} \subset \ker f^k$, et sont de même dimension d'après la formule du rang et la question précédente, d'où l'égalité.

⑤ **a**

i Pour $k = 1$, on a déjà vu que $\ker f \neq 0$, donc $\dim \ker f \geq 1$.
Supposons que $\dim \ker f^k \geq k$, on sait que la suite des noyaux itérés ne devienne stationnaire qu'à partir de $k = p$, donc $\dim \ker f^{k+1}$ $\dim \ker f^k \geq k$, d'où $\dim \ker f^{k+1} \geq k+1$.

ii Pour $k = n-2$, on a $f^{n-2} = f^{p-1} \neq 0$, donc $\ker f^{n-2} \neq E$, d'où $\dim \ker f^{n-2} < n = \dim E$, autrement dit : $\dim \ker f^{n-2} \leq n-1$
Supposons que $\dim(\ker f^{k+1}) \leq k+2$, toujours d'après le même que la suite des noyaux itérés est strictement décroissante pour $k \leq p$, on a $\dim \ker f^k < \dim(\ker f^{k+1}) \leq k+2$, d'où $\dim \ker f^k \leq k+1$.

b On suppose que $\exists k \in \{1, \ldots, n-2\}$ tel que $\dim(\ker f^k) = k$ et $\dim(\ker f^{k+1}) = k+2$.

i D'après la question ④ de la partie I, on a $\dim(\ker f^k) - \dim(\ker f^{k-1}) \geq \dim(\ker f^{k+1}) - \dim(\ker f^k) = 2$

ii On a $\dim \ker f^{k-1} \geq k-1$, d'où $k = \dim \ker f^k \geq k+1$, absurde.
On montre de la même façon (par récurrence) que dans la question ④ de la partie I, que $\dim \ker f^k = k$, $\forall 0 \leq k \leq n-2$.

Partie III : Opérateur des différences finies.

① Utiliser la relation $\deg(P(X+1) - P(X)) \leq \max(\deg P(X+1), \deg(X)) \leq n$ car $\deg P(X+1) \leq n$

② Δ est linéaire, il est simple de vérifier que $\Delta(P + \lambda Q) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)$. or $\Delta : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Avant de préciser son rang, chercher d'abord $\dim \ker \Delta$. $P \in$

$\ker\Delta \iff P(X+1) = P(X)$, Posons $Q(X) = P(X) - P(0)$, alors $Q(0) = Q(1) = Q(2) = ...$, ainsi Q admet une infinité de racines, donc est nul, d'où P est constant, $\ker\Delta$ est l'ensemble des polynômes constants, dont le dimension vaut 1. La formule du rang donne $\mathrm{rg}\Delta = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X] - \dim\ker\Delta = n-1$.

③ $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$ avec $\deg P(X+1) = \deg P(X)$ et $\mathrm{co}P(X+1) = \mathrm{co}P(X)$, donc $\deg\Delta P(X) < \deg P(X)$, i.e. $\deg(\Delta P) \leq \deg(P) - 1$. Par récurrence, on montre que $\deg\Delta^k P \leq \deg P - k \leq n-1-k$. En particulier, $\deg\Delta^n P < 0$, i.e., $\Delta^n = 0$.

④ **a**

$$\begin{aligned}\Delta L_k(X) &= L_k(X+1) - L_k(X) \\ &= \frac{(X+1)X\cdots(X-k) - X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!} \\ &= X\cdots(X-k)\frac{(X+1)-(X-k+1)}{k!} \\ &= \frac{X\cdots(X-k)}{(k-1)!} = L_{k-1}(X)\end{aligned}$$

b Par récurrence, on montre que $\Delta^k L_{n-1} = L_{n-1-k}$

⑤ On a $\Delta^n = 0$ et $\Delta^{n-1}L_{n-1} = L_0 \neq 0$, donc Δ est nilpotent d'indice égal à $n-1$.

⑥ D'après la question ④-c de la partie II, appliquée à $f = \Delta$, sur $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $p = n-1$, donc $\ker\Delta^{n-k} = \mathrm{Im}\,\Delta^k$, d'autre part $\dim\ker\Delta^{n-k} = n-k = \mathbb{R}_{n-k}[X]$, d'où l'égalité.

⑦ On montre d'abord par récurrence que $\mathcal{T}^k P(X) = P(X+k)$, d'où $\Delta^m P(X) = (\mathcal{T} - id)P(X) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\mathcal{T}^k P(X) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{n-k}\binom{m}{k}P(X+k)$.

⑧ On remarque $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(X+k) = \Delta^n P(X) = 0$.

Fin

Á la prochaine