

DI 1 Autour de la Comatrice.

Blague du jour

- Pourquoi les vaches ne parlent pas ? - C'est marqué la ferme.
- Deux vaches discutent dans un pré :
 La première : Dis, ça t'inquiète pas, ces histoires de vaches folles dont on parle en ce moment ?
 La deuxième : Non, moi, je m'en fou, je suis un lapin.



Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. En 1884, il entra premier l'école normale supérieure. Son résultat le plus célèbre est $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs x . Il a laissé son nom aux *matrices de Hadamard* utilisés en algorithmes quantiques, traitement du signal, compression de données, ...

Mathématicien du jour

Énoncé

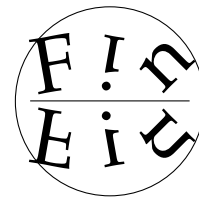
- ① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.
- a** On suppose que A est inversible.
 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on pose $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.
- i** Montrer que $f(F_k) = F_k$.
 - ii** En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.
 - iii** En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.
 - iv** En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

- b** On suppose que A est non inversible.
- i** Montrer que $\exists \alpha \neq 0$ tel que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.
 - ii** En déduire que $\text{com}(A)$ est triangulaire inférieure.

- ② Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 Montrer que :
 si $\text{rg}(A) = n$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = n$
 si $\text{rg}(A) = n - 1$ alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$
 si $\text{rg}(A) \leq n - 2$ alors $\text{com}(A) = 0$
- ☛ Indication : On pourra utiliser le résultat suivant, dit théorème de Rouché-Fontené :
 Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg}(A) = r$, alors il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ extraite de A qui soit inversible.

- ③ Exprimer $\text{com}(\lambda A)$. en fonction de λ, n et $\text{com}(A)$.
- ④ Calculer $\text{com}(\text{com } A)$ dans le cas où A est inversible.
- ⑤ Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a Calculer $\text{com}(I_n)$.
 - b Si A et B sont inversibles, démontrer que

- $\text{com}(AB) = (\text{com } A)(\text{com } B)$ et $\text{com}(A^{-1}) = \text{com}(A)^{-1}$.
- c Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant des scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.
 - d En déduire que si A et B sont semblables, alors $\text{com } A$ et $\text{com } B$ le sont aussi.



À la prochaine