DL 1 Autour de la Comatrice.

Blague du jour

• Pourquoi les vaches ne parlent pas ? - C'est marqué la ferme.
• Deux vaches discutent dans un pré :
La première : Dis, ça t'inquiète pas, ces histoires de vaches folles dont on parle en ce moment ?
La deuxième : Non, moi, je m'en **fou**, je suis un lapin.

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. En 1884, il entra premier l'*école normale supérieure*. Son résultat le plus célèbre est $\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\ln x}$ où $\pi(x)$ désigne le nombre de nombres premiers inférieurs x. Il a laissé son nom aux *matrices de Hadamard* utilisés en algorithmes quantiques, traitement du signal, compression de donnes, ...

Mathématicien du jour

Énoncé

① Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.

a On suppose que A est inversible.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, associé A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on pose $F_k = Vect(e_1, \cdots, e_k)$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

i Montrer que $f(F_k) = F_k$.

ii En déduire que $f^{-1}(F_k) = F_k$.

iii En déduire que A^{-1} est triangulaire supérieure.

iv En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.

b On suppose que A est non inversible.

i Montrer que $\exists \alpha \neq 0$ tel que $\forall 0 < \varepsilon < \alpha$, on a $A - \varepsilon I_n$, non inversible.

ii En déduire que $com(A)$ est triangulaire inférieure.

② Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que :

si $\text{rg}(A) = n$	alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = n$
si $\text{rg}(A) = n-1$	alors $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$
si $\text{rg}(A) \leq n-2$	alors $\text{com}(A) = 0$

☛ Indication : On pourra utiliser le résultat suivant, dit théorème de Rouché-Fontené :
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg}(A) = r$, alors il existe une matrice carrée $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ extraite de A qui soit inversible.

③ Exprimer $\operatorname{com}(\lambda A)$. en fonction de λ, n et $\operatorname{com}(A)$.

④ Calculer $\operatorname{com}(\operatorname{com} A)$ dans le cas où A est inversible.

⑤ Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a Calculer $\operatorname{com}(I_n)$.

b Si A et B sont inversibles, démontrer que $\operatorname{com}(AB) = (\operatorname{com} A)(\operatorname{com} B)$ et $\operatorname{com}(A^{-1}) = \operatorname{com}(A)^{-1}$.

c Démontrer le même résultat dans le cas général, en considérant des scalaires λ tels que $A - \lambda I$ et $B - \lambda I$ soient inversibles.

d En déduire que si A et B sont semblables, alors $\operatorname{com} A$ et $\operatorname{com} B$ le sont aussi.

Á la prochaine