PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Devoir Libre

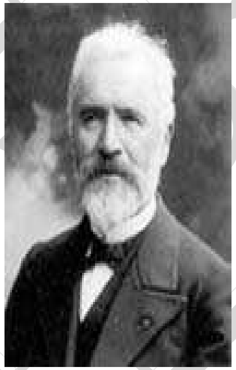
Algebre Lineaire : Revision Sup

15 SEPTEMBRE 2012

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).

- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un poyltechnicien (1855) fils de polytechnicie (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Mathématicien du jour

Problème I. Polynômes de Lagrange, de Bernstein.

Notation et vocabulaire.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts, on pose $L_k(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \dfrac{X - a_i}{a_k - a_i}$, appelés polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $a_0, \ldots, a_n$.

- Dans tout le problème, $l^\infty([0,1], \mathbb{R})$ désignera l'ensemble des fonctions définies de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$, bornées.

- On pose :
$$P_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$
$$P_{0,0} = 1$$

- pour tout $f \in l^\infty([0,1], \mathbb{R})$, les polynômes de Bernstein associés sont définies par les relations suivantes :

$$B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P_{n,k}(X) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ avec } 0 \leq k \leq n$$

$$B_0(f) = 1$$

☞ Pour tout $f \in l^{\infty}([0,1],\mathbb{R})$, on pose : $||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

☞ On dira qu'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f, quand $\lim_{n\longrightarrow+\infty\rightarrow|} |f_n - f|| = 0$.

☞ On rappelle qu'une fonction f est dite continue uniformément sur $[0,1]$ si elle vérifie la propriété suivante :

$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\eta > 0$ tel que $\forall(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ on a :

$$|x-y| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

☞ Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$

Partie I.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0,\dots,a_n$ des réels deux à deux distincts.

① Calculer $L_k(a_j)$ pour $0 \leq j,k \leq n$.

② En déduire que la famille $(L_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.

③ Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$.

On pourra s'intéresser aux racines de $Q(X) = P(X) - \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(X)$.

④ En déduire que la famille $(L_k(X))_{0\leq k\leq n}$ est une base $\mathbb{R}_n[X]$.

⑤ En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\exists! P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(a_k) = f(a_k), \forall k \in [|0,n|]$.
On dit que P interpole f aux points $(a_k)_{0\leq k\leq n}$.

⑥ En déduire que l'application : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P(X) & \longmapsto & (P(a_0),\dots,P(a_n)) \end{array}$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Partie II.

① Montrer que $(l^{\infty}([0,1],\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

② Montrer que la famille $(P_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$.
On admettra dans la suite qu'elle en génératrice, donc base.

③ Exprimer $(X^n(1-X)^n)^{(n)}$ dans cette base.

④ En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

⑤ Montrer que $B_n : \begin{array}{ccc} l^{\infty}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ f & \longmapsto & B_n(f) \end{array}$ est linéaire.

⑥ **a** Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = 1$.

b En déduire que : $\sum_{k=0}^{n} (k-nX)^2 P_{n,k} = nX(1-X)$.

c Établir la formule suivante :

$$B_n(Xf) = \frac{1}{n}X(1-X)\left(B_n(f)\right)' + XB_n(f)$$

⑦ **a** Montrer que pour tout $m \leq n$, $B_n(X^m)$ est un polynôme de degré m.

b En déduire que B_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III.

① Soit $x \in [0,1]$ et $\alpha \in]0,1[$.

On pose : $K_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq k \leq n \text{ et } \alpha < \left| \frac{k}{n} - x \right| \right\}$.

Montrer que : $\sum_{k \in K_n} P_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$.

On pourra d'abord remarquer que $\max_{t\in[0,1]} t - t^2 = \frac{1}{4}$.

② **a** On suppose f continue en un point $x_0 \in [0,1]$, montrer alors que : $\lim_{n\to+\infty} B_n(f)(x_0) = f(x_0)$.

b On suppose f continue sur $[0,1]$, montrer alors que $B_n(f)$ converge uniformément vers f dans l'intervalle $[0,1]$.

Partie IV.

① Montrer que l'application Δ est linéaire.

② Préciser le noyau de sa réstriction, Δ_n définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.

③ Montrer que $\deg(\Delta P) = \deg(P) - 1$, pour tout polynôme P non constant.

④ En déduire que $\operatorname{Im} \Delta_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

On pourra d'abord montrer que X^k admet un antécédant dans $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $k \in [|0, n-1|]$.

⑤ Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que :

a $\Delta^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+n-k)$.

Où $\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \ldots \circ \Delta}_{\text{n fois}}$ et la convention $\Delta^0(f) = f$.

b $B_n(f)(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^k(g)(0)$

Où g est la fonction définié par $g(x) = f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Problème II. Crochet de Lie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tous éléments f et g de $\mathcal{L}(E)$, on pose $[f,g] = f \circ g - g \circ f$.

Partie I.

① Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $(x, f(x))$ est liée $\forall x \in E$.

a Montrer que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x.x$.

b Montrer que $\forall (x,y) \in E \setminus \{0_E\} \times E \setminus \{0_E\}$, on a : $\lambda_x = \lambda_y$

On pourra étudier les cas : $\{x,y\}$ libre et $\{x,y\}$ liée.

c En déduire que f est une homothétie de E.

② Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f,g] = 0, \quad \forall g \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose que f n'est pas une homothétie.

a justifier l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $(x, f(x)$ soit libre.

b Soit $F = Vect\{x\}$ et H un supplémentaire de F contenant $f(x)$, dont on admettra l'existence, et g la symétrie par rapport à F parallélement à G.
Calculer $g(f(x))$ et $f(g(x))$, puis en déduire une contradiction.

c Conclure.

Partie II.

Dans toute cette partie on se donne $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $[f, g] = \alpha f + \beta g$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

① On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$.

a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $[f^n, g] = \alpha n f^n$.

On rappelle que $f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{\text{n fois}}$ avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_E$.

b On suppose que $f^{n+1} = 0$ et $f^n \neq 0$, montrer alors que la famille $(\mathrm{id}_E, \ldots, f^n)$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$.

② Dans cette question on suppose que f et g sont des projecteurs de E distincts, et $\alpha \notin \{0, 1\}$.

a Montrer que $2\alpha(g \circ f) + \beta(1+\alpha)g = \alpha(1-\alpha)f$.

b En déduire que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$, puis que $g \circ f = f$.

c On suppose $f \neq 0$, montrer que $\alpha = -1, \beta = 1$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} g$.

d Réciproquement montrer que si p et q sont des projecteurs de E, vérifiant $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$ et $q \circ p = p$, alors $[p, q] = -p + q$.

③ Dans cette question on suppose que f et g sont des projecteurs de E distincts avec $f \neq 0$, et $\alpha \notin \{0, -1\}$.

a Montrer que $\ker g \subset \ker f$, $f \circ g = f$.

b Montrer que $\alpha + \beta = 0, \alpha = 1$.

c En déduire que $\ker g = \ker f$.

d Réciproquement montrer que si p et q sont des projecteurs de E, vérifiant $\ker p \subset \ker q$ et $p \circ q = p$, alors $[p, q] = p - q$.

FIN
Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com