e3a

Concours ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Devoir Surveillé

1 Recherche de quelques polynômes minimaux

Épreuve de Mathématiques A MP

Énoncé : (extrait e3a 2008, MP)

Durée 4 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours et exemples.

Soit E un $\mathbb{R}$ – espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

1. Donner la définition d'un polynôme annulateur de f.

2. Quelle est la structure de l'ensemble J_f des polynômes annulateurs de f ?

3. Donner la définition du polynôme minimal de f que l'on notera π_f.

4. Prouver l'existence de π_f.

5. **Un premier exemple**.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ de matrice canoniquement associée :

$$M = (m_{ij}) \text{ où } \forall (i,j) \in \{1,\dots,4\} \times \{1,\dots,4\},\ m_{ij} = \tfrac{1}{4}\left(1 + (-1)^{i+j}\right).$$

5.1. Calculer M^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Déterminer π_f.

6. **Un second exemple**.

6.1. Chercher les solutions à valeurs réelles des équations différentielles :

$$y'' + y = ch(x) \qquad \text{et} \qquad y'' + y = sh(x)$$

où ch et sh sont respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.

6.2. On considère (H_1) l'équation différentielle : $y^{(4)} = y$.

Soit f une fonction de classe C^4 sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que f est solution de (H_1) si et seulement si la fonction $g = f'' + f$ est solution d'une équation différentielle du second ordre (H_2) que l'on déterminera.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

6.3. Résoudre l'équation (H_2).

6.4. En déduire les solutions de (H_1).

6.5. On note alors E le sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des applications de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles engendré par $\left(\cos, \sin, ch, sh\right)$.

6.5.1. Quelle est la dimension de E ?

6.5.2. Justifier que la dérivation induit sur E un endomorphisme δ.

6.5.3. Déterminer le polynôme minimal π_δ de E.

Problème.

Dans tout le problème, $E = \mathbb{R}[X]$ et $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E muni de ses opérations usuelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n sera noté $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

L'endomorphisme identité de E est noté e, l'endomorphisme nul θ. Lorsque l'on est dans l'espace vectoriel normé E_n, on notera respectivement ces endomorphismes e_n et θ_n.

On rappelle que si f est un endomorphisme de E, $f^0 = e$ et

$$\forall\ m \in \mathbb{N}^*, f^m = f \circ f^{m-1}.$$

Lorsque f est un endomorphisme de E_n, on note χ_f son polynôme caractéristique.

Soient $u : P \in E \mapsto u(P) = P'$ où P' désigne le polynôme dérivé de P, et

$v : P \in E \mapsto v(P) = R$ où $R(X) = P(X+1)$.

Partie 1 : Quelques propriétés des endomorphismes u et v.

1. Rappeler la dimension de E_n. En donner une base usuelle.

2. Montrer que u et v sont des endomorphismes de E qui laissent stable E_n.

On note alors u_n et v_n les endomorphismes induits par restriction de u et de v à E_n.

3. Ecrire les matrices U_n et V_n de u_n et v_n dans la base canonique de E_n.

4. Préciser le noyau et l'image de chacun de ces endomorphismes.

5. Les endomorphismes u_n et v_n commutent-ils ?

6. Quel est le polynôme caractéristique de u_n ? u_n est-il diagonalisable ?

7. Quel est le polynôme caractéristique de v_n ? v_n est-il diagonalisable ?

8. On note $w_n = v_n - e_n$ et on pose :

$$Q_0 = 1, \qquad \forall\ k \in \{1,\dots,n\},\ Q_k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j).$$

8.1. Vérifier que la famille $\mathcal{B} = (Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E_n.

8.2. Déterminer $w_n(Q_0)$.

ممُوني مُولَاي اسمَاعِيل ✉ : mamouni.myismail@gmail.com

- Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, il existe un réel α_k non nul, tel que :

$$w_n(Q_k) = \alpha_k Q_{k-1}.$$

8.3. Ecrire la matrice W_n de w_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Donner une base de $\mathrm{Ker}(w_n)$ ainsi que de $\mathrm{Im}(w_n)$.

8.5. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0,...,n\}$, $w_n^j(Q_k)$.

On rappelle que $w_n^j = \underbrace{w_n o w_n o ... o w_n}_{j \text{ facteurs}}$.

9. Détermination des composantes d'un polynôme de E_n dans la base $\mathcal{B}$.

9.1. Soit $P \in E_n$.

Justifier l'existence et l'unicité de scalaires $(\beta_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tels que : $P = \sum_{k=0}^{n} \beta_k Q_k$.

9.2. Calculer $w_n^j(P)(0)$ pour $j \in \mathbb{N}$.

9.3. Exprimer alors les composantes de P dans la base $\mathcal{B}$.

9.4. Déterminer la base duale de la base $\mathcal{B}$.

10. Calculer w_n^{n+1} et $w_n^n(Q_n)$.

Partie 2 : Recherche de quelques polynômes minimaux.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E_n)$. Justifier que π_f divise χ_f.

2. Recherche de π_{u_n}.

2.1. Déterminer u_n^{n+1}.

2.2. Calculer : $u_n^n\left(X^n\right)$.

2.3. Conclure.

2.4. De même, déterminer le polynôme minimal de w_n.

3. Recherche de π_{v_n}.

3.1. Montrer qu'il existe $m \in \{1,...,n+1\}$ tel que $\pi_{v_n} = (X-1)^m$.

3.2. Prouver que : $m = n+1$.

4. Polynômes annulateurs de u.

Soit P un polynôme de degré $m \in \mathbb{N}$ écrit : $P = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j$.

4.1. Que sait-on de a_m ?

✉ : mamouni.myismail@gmail.com ممّوني مولاي اسماعيل

4.2. On note r l'endomorphisme $P(u)$. Déterminer $r\left(\dfrac{X^m}{m!}\right)$.

4.3. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

5. Polynômes annulateurs de v.

Soit P un polynôme non nul annulateur de v.

5.1. Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^{n+1}$ divise P.

5.2. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de v.

6. Soit s l'endomorphisme de E qui à tout polynôme P associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = P(1 - X).$$

6.1. Vérifier que s est une involution de E.

6.2. Déterminer l'ensemble des polynômes annulateurs de s.

Partie 3. Facultative, ne sera pas comptée

Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel normé E_n.On rappelle que :

$$\exp(f) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^m}{m!} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{N} \frac{f^m}{m!}$$

1. Montrer que l'on a la relation : $v_n = \exp(u_n)$.

2. On va démontrer dans cette question que : $u_n = \displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} (v_n - e_n)^m$.

2.1. Prouver que :

$$\forall\ k \in \{0,\dots,n\},\ u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n(Q_m)(0)\ Q_{k-m}.$$

On pourra utiliser la question **9.3**. de la partie **1**.

2.2. Calculer pour tout $m \in \{0,\dots,n\}$, $u_n(Q_m)(0)$.

2.3. Conclure.

Fin du problème

مَمُوني مُولَاي اسْمَاعِيل ✉ : mamouni.myismail@gmail.com