Mmi Former pour réussir

Problèmes Corrigés MP

Devoir Libre

Arithmétique des polynômes

29 septembre 2012

Blague du jour

Un homme regarde un match de foot dans un café, lorsque son équipe nationale marque un but, le chien se met à courir dans tout les sens. Le voisin demande à l'homme : Qu'est ce qui lui arrive votre chien ?
- Il est supporter de l'équipe nationale, il est content.
- Ben dites donc, juste pour un but ! Et qu'est-ce-qu'il fait quand elle gagne un match ?!!
- Je ne sais pas, je ne l'ai que depuis 5 ans...

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894)

Mathématicien du jour

Mathématicien russe, connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. Tchebychev appartient à l'école mathématique russe fondée par Daniel Bernoulli et Euler. Il démontra en 1850 une conjecture énoncée par Bertrand : Pour tout entier n au moins égal à 2, il existe un nombre premier entre n et $2n$.

Commutant d'un endomorphisme. CNC 99, TSI.

Définitions et notations

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $h, g \in \mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $h \circ g$ sera noté simplement hg, l'identité se notera I.
Si f est un endomorphisme quelconque de E, on note $f^0 = I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, f^k désigne l'endomorphisme composé de k endomorphismes égaux à f ; si $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ désigne l'endomorphisme $\sum\limits_{k=0}^{p} a_k f^k$. On note aussi $\mathbb{K}[f] = \{P(f);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E);\ fg = gf\}$.

Partie I

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

Soit f un endomorphisme quelconque de E.

① **a** Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

b Montrer que $\mathbb{K}[f]$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenue dans $C(f)$.

c Si f est une homothétie, déterminer $C(f)$ et $\mathbb{K}[f]$.

Dans la suite on montre que si $C(f) = \mathcal{L}(E)$ alors f est une homothétie.

② Dans cette question, on suppose que pour tout vecteur $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

a Démontrer que : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda_x.x$.

b Soit $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$, démontrer que si la famille (x,y) est liée alors $\lambda_x = \lambda_y$.

c Soit $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$, démontrer que si la famille (x,y) est libre alors $\lambda_x = \lambda_y$.

d En déduire alors que f est une homothétie.

③ On suppose maintenant que f n'est pas une homothétie.

a Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit libre.

b Justifier l' existence d'une famille $(e_3, \ldots, e_n)$ d'éléments de E telle que la famille $(x, f(x), e_3, \ldots, e_n)$ soit une base de E.

c On désigne par h la symétrie de E par rapport au sous-espace vectoriel $\mathbb{K}.x$ parallèlement au sous-espace vectoriel $Vect(\{f(x), e_3, \ldots, e_n\})$.

Comparer $h(f(x))$ et $f(h(x))$ puis en déduire que $h \notin C(f)$.

④ On suppose maintenant que $C(f) = \mathcal{L}(E)$. Montrer, en utilisant les questions précédentes, que f est une homothétie.

Partie II

Soit f un endomorphisme quelconque de E.

① Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des scalaires distincts. On désigne par φ l'application qui à tout élément P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ fait correspondre l'élément $(P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n))$ de $\mathbb{K}^n$.

a Montrer que φ est un morphisme d'espaces vectoriels.

b Déterminer son noyau et en déduire que c'est un isomorphisme d'espaces vectoriels .

c On pose $L_i = \prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \dfrac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$.

☞ Calculer $\varphi(L_i)$ pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ et en déduire que $(L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

☞ Exprimer l'antécédent par φ d'un élément $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ à l'aide de $L_1, \ldots, L_n$ et $a_1, \ldots, a_n$.

② On suppose dans cette question que f possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, e_i désigne un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i et E_{λ_i} le sous-espace propre associé.

a

- Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.
- Qu'en déduit-on pour f ?
- Exprimer E_{λ_i} à l'aide du vecteur e_i.

b Soit $g\in C(f)$.

- Montrer que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $g(e_i)\in E_{\lambda_i}$ et en déduire que e_i est un vecteur propre de g. Soit alors α_i la valeur propre associée.
- A l'aide de la question **1**, justifier l'existence d'un unique polynôme $Q\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $Q(\lambda_i)=\alpha_i$ pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$.
- Pour chaque $i\in\{1,\dots,n\}$ calculer $f^k(e_i)$, $k\in N^*$, puis $Q(f)(e_i)$.
- En déduire que $Q(f)=g$.

c Montrer que $C(f)=Vect(\{I,f,\dots,f^{n-1}\})=\mathbb{K}[f]$.

d En utilisant la question 1 de cette partie, montrer que la famille $(I,f,\dots,f^{n-1})$ de $\mathcal{L}(E)$ est libre et en déduire $\dim C(f)$.
(On pourra vérifier, en calculant les $P(f)(e_i)$, que si $P\in\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et $P(f)=0$ alors $\varphi(P)=0$ pour φ à préciser).

③ Dans cette question, on suppose que $\dim E=2$ et que f n'est pas une homothétie.

a Etudier la famille (I,f) et en déduire un minorant de la dimension de $\mathbb{K}[f]$ puis de celle de $C(f)$.

b Justifier l'existence de $e\in E$ tel que $(e,f(e))$ soit une base de E et montrer que l'application $H:C(f)\longrightarrow E$ qui à $g\in C(f)$ fait correspondre $g(e)$ est un morphisme injectif d'espaces vectoriels .

c En déduire la dimension de $C(f)$ et de $\mathbb{K}[f]$ puis exprimer $C(f)$ et $\mathbb{K}[f]$ à l'aide de I et f.

d Déduire de ce qui précède que la famille (I,f,f^2) de $\mathcal{L}(E)$ est liée et déterminer les composantes de f^2 dans la base (I,f) de $C(f)$.

Partie III

Soit A un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par la composition des applications. Dans cette partie, on suppose que $\dim A=n^2-1$. On veut montrer que $I\in A$. Pour cela, raisonnant par l'absurde, on suppose que $I\notin A$.

① **a** Montrer que A et $\mathbb{K}.I$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

b Soit p la projection sur $\mathbb{K}.I$ parallèlement à A. Montrer que p est un morphisme d'algèbres.

② Montrer que si $f\in\mathcal{L}(E)$ et $f^2\in A$, alors $f\in A$.

③ Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. f_{ij} désigne l'élément de $\mathcal{L}(E)$ définit par :

$$\begin{cases} f_{ij}(e_j) = e_i \\ f_{ij}(e_k) = 0 \quad \text{si } k \neq j \end{cases}$$

a Calculer f_{ij}^2 pour $i \neq j$.

b Montrer que si $i \neq j$ alors $f_{ij} \in A$.

c En déduire que $f_{ii} \in A$. (On pourra calculer $f_{ij}f_{ji}$ pour un $j \neq i$).

④ Calculer $\sum_{i=1}^{n} f_{ii}$ et conclure.

⑤ ☞ Montrer que $(f_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ constitue une base de $\mathcal{L}(E)$.

☞ Vérifier les relations $f_{ij}f_{kl} = \delta_{jk}f_{il}$ où $\delta_{jk} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{jk} = 0$ si $j \neq k$.

Partie IV

Dans cette partie, on suppose que : dim E=2 et dim A=3.

① ① Montrer que A possède une base du type (I, φ, ψ).

② Montrer que $\varphi\psi \neq \psi\varphi$.
(On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question **3** de la partie **II**)

③ Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $\varphi\psi = \lambda\varphi + \mu\psi + \nu I$.

④ Calculer alors $(\varphi - \mu I)(\psi - \lambda I)$ et montrer que $(\varphi - \mu I)(\psi - \lambda I) = 0$. (On pourra raisonner par l'absurde).

⑤ Montrer alors que A possède une base du type (I, φ_1, ψ_1) avec $\varphi_1\psi_1 = 0$.

② ① Montrer que Im $\psi_1 \subset$ Ker φ_1 et que les endomorphismes φ_1 et ψ_1 sont de rang 1.

② Montrer que φ_1 et ψ_1 ont un vecteur propre commun qu'on notera e_1.

③ En déduire qu'il existe une base (e_1, e_2) de E telle que la matrice de tout élément de A dans cette base soit triangulaire supérieure.

③ Soit maintenant (e_1', e_2') une base de E et A' la partie de $\mathcal{L}(E)$ formée de tous les endomorphismes dont les matrices dans cette base sont triangulaires supérieures. Montrer que A' est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3.

FIN FIN

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com