Devoir Libre 4 Arithétique

Blague du jour

- Trois statisticiens vont la chasse au canard. Un canard décolle. Le premier tire et passe dix centimètres au-dessus. Le second tire et passe dix centimètres en-dessous. Le troisième, tout sourire : "c'est bon les gars, on l'a eu !"
- La vie est complexe, elle a une partie réelle et une autre imaginaire.
- Qu'est-ce qu'un ours polaire ? C'est un ours cartésien qui a changé ses coordonnés.

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)

Mathématicien du jour

Mathématicien, physicien et astronome irlandais. Il est connu pour sa découverte des quaternions, mais il contribua aussi au développement de l'optique, de la dynamique et de l'algèbre. Ses recherches se révélèrent importantes pour le développement de la mécanique quantique.
Enfant prodige ; et doué pour les langues à l'âge de 7 ans, il parlait déjà en hébreu et, à l'âge de 13 ans, sous la direction de son oncle qui est linguiste, il parlait déjà 13 langues : le persan, l'arabe, l'hindousthânî, le sanskrit, le malais,....

Matrices Stochastiques (extrait cnc 2002, TSI)

Notations et définitions

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

On désigne enfin par $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices $A=(a_{ij})$ dont tous les coefficients sont **positifs ou nuls** et vérifient :

$$\forall\, i \in \{1,\ldots,n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

Quelques propriétés de matrices appartenant à $\mathcal{K}_n$

Dans cette partie, $A=(a_{ij})$ désigne un élément de $\mathcal{K}_n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on pose $e=e_1+\cdots+e_n$.

Soit λ une valeur propre de u et $x=(x_1,\ldots,x_n)$ un **vecteur propre** associé.

A- Premiers résultats

1. Montrer que 1 est une valeur propre de u et déterminer un vecteur propre associé.
2. En faisant une traduction matricielle de l'égalité $u(x)=\lambda x$ et en choisissant un indice p tel que $|x_p| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Dans la suite, on pose $m = \min\{a_{ii}\ ;\ \ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
   (a) En utilisant une méthode analogue à la précédente, montrer que $|\lambda - m| \leqslant 1 - m$.
   (b) Dessiner le cercle $\mathcal{C}(0,1)$, de centre 0 et de rayon 1, et le disque fermé $\overline{D}(m, 1-m)$ sur un même graphique. (*on rappelle que* $\overline{D}(m,1-m) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-m| \leqslant 1-m\}$.)
4. On suppose que $m > 0$; montrer que si λ est de module 1 alors $\lambda = 1$.
5. On suppose que $m > \frac{1}{2}$. Vérifier que $0 \notin \overline{D}(m, 1-m)$ et conclure que A est une matrice inversible.

B- Toute valeur propre de A de module 1 est une racine de l'unité

Dans la suite de cette partie, on suppose que $|\lambda| = 1$ et on choisit $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$. On pose $I_0 = \{j \in \{1,\ldots,n\}/ \quad a_{i_0 j}x_j \neq 0\}$.

1. (a) Exprimer $\sum\limits_{j\in I_0} a_{i_0 j}x_j$ à l'aide de λ et x_{i_0} et en déduire que I_0 est non vide.
   (b) Montrer que $\sum\limits_{j\in I_0} a_{i_0 j} = 1$.
   (c) Vérifier que $\left|\sum\limits_{j\in I_0} a_{i_0 j}x_j\right| = \sum\limits_{j\in I_0} |a_{i_0 j}x_j| = |x_{i_0}|$ et en déduire, d'une part que
   $$\forall\, j \in I_0,\ |x_j| = |x_{i_0}|,$$
   d'autre part, en utilisant un résultat précédent, justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}$ et d'une famille $(\alpha_j)_{j\in I_0}$ de réels positifs tels que
   $$\forall\, j \in I_0,\ a_{i_0 j}x_j = \alpha_j z.$$
   (d) Déduire de ce qui précède que
   $$\forall\, (j,k) \in I_0^2,\ x_j = x_k$$
   et que
   $$\lambda x_{i_0} = x_{i_1},\ i_1 \in \{1,\ldots,n\}.$$

2. (a) Montrer qu'on peut construire une suite finie $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ d'éléments de $\{1, \dots, n\}$ telle que

$$|x_{j_0}| = \dots = |x_{j_n}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

et que

$$\forall\, k \in \{1, \dots, n\},\ \lambda x_{j_{k-1}} = x_{j_k}$$

(b) En déduire alors qu'il existe $q \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\lambda^q = 1$.

3. Dans cette question, on suppose que tous les coefficients de A sont strictement positifs :

$$\forall\, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} > 0.$$

En utilisant la question 1. (d) précédente, montrer que l'espace propre de u, associé à la valeur propre 1, est égal à $\mathbb{C}.e$ où $e = (1, \dots, 1)$.

Fin

Á la prochaine