.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre 2 par Jean-Charles Dufait

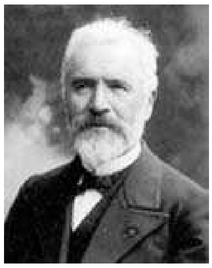
Polynôme minimal et caractéristique

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).

- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Mathématicien du jour

Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un poyltechnicien (1855) fils de polytechnicie (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

E3A, 2008, MP, Mathématiques A

(6 pages)

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (et accessoirement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).

3. Si $J_f \neq \{0\}$, le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire π_f tel que $J_f = \pi_f.\mathbb{R}[X]$. C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à J_f de plus petit degré.

4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J_f \neq \{0\}$ puisque le polynôme caractéristique de f, χ_f appartient à J_f.

5. 1. On a $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M$ et donc, par récurrence, $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = M}$.

2. Ainsi $X^2 - X \in J_f$ donc $\pi_f \mid X^2 - X = X(X-1)$ et donc $\pi_f \in \{X, X-1, X^2 - X\}$ (1 n'est pas annulateur si $E \neq \{0\}$). Or $M \neq 0$ et $M \neq I_4$ donc $\underline{\pi_f = X^2 - X}$.

6\. 1. ⋄ L'équation homogène $y'' + y = 0$ est à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 + 1 = 0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Comme $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch}$, une solution particulière de $y''+y = \operatorname{ch}(x)$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{ch}(x)$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de y

⋄ De même, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = \operatorname{sh}(x)$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{2}\operatorname{sh}(x) + A\cos(x) + B\sin(x)$ pour $(A,$

2\. Puisque f est supposée de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned}
\Big(f \text{ solution de } (H_1)\Big) &\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) = f(x)\Big)\\
&\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(4)}(x) + f''(x) = f(x) + f''(x)\Big)\\
&\iff \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ g''(x) = g(x)\Big)
\end{aligned}$$

donc $\underline{\Big(f \text{ solution de } (H_1)\Big) \iff \Big(g = f'' + f \text{ solution de } y'' = y\Big)}$.

3\. $(H_2) : y'' - y = 0$ est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2 - 1 = 0$ donc a pour solutions les fonctions $x \mapsto A\,e^{x} + B\,e^{-x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, ou aussi, les solutions de (H_2) sont les $y : x$

4\. Le principe de superposition des solutions et les résultats de la question [6.1] donnent :
$\underline{\text{les solutions de } (H_1) \text{ sont les } y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) + C\operatorname{ch}(x) + D\operatorname{sh}(x) \text{ avec } (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4}$.

1. Par définition de E, la famille $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$ en est génératrice. De plus, si $A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh} = 0$ alors, en dérivant deux fois, $-A\cos - B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh} = 0$ donc $A\cos + B\sin = 0$ et $C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh} = 0$. En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient $A = B = C = D = 0$ donc cette famille est libre etc'est donc une base de E. Ainsi $\underline{\dim(E) = 4}$.

2. La dérivation est linéaire et $\big(A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh}\big)' = -A\sin + B\cos + C\operatorname{sh} + D\operatorname{ch} \in E$ donc E est stable. Donc $\underline{\text{la dérivation induit bien un endomorphisme de } E}$.

3. D'après [6.4], E est l'ensemble des solutions de (H_1) donc $\forall y \in E,\ y^{(4)} = \delta^4(y) = y$. Ainsi $X^4 - 1 \in J_\delta$ et $\pi_\delta \mid X^4 - 1$. Si $\pi_\delta \neq X^4 - 1$ alors $\deg(\pi_\delta) \leqslant 3$ donc $\pi_\delta = \sum_{i=0}^{3} a_i X^i$. On alors

$$\begin{aligned}
\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad 0 &= \pi_\delta(\delta)\big[A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh}\big]\\
&= \sum_{i=0}^{3} a_i \big[A\cos + B\sin + C\operatorname{ch} + D\operatorname{sh}\big]^{(i)}\\
&= \big((a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B\big)\cos + \big((a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A\big)\sin\\
&\quad + \big((a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D\big)\operatorname{ch} + \big((a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C
\end{aligned}$$

donc, par liberté de $(\cos, \sin, \operatorname{ch}, \operatorname{sh})$,

$$\forall (A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{cases} (a_0 - a_2)A + (a_3 - a_1)B = 0\\ (a_0 - a_2)B + (a_1 - a_3)A = 0\\ (a_0 + a_2)C + (a_1 + a_3)D = 0\\ (a_0 + a_2)D + (a_1 + a_3)C = 0 \end{cases}$$

soit $a_0 = a_2 = -a_0$ et $a_1 = a_3 = -a_1$ donc $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ce qui est absurde. Donc $\underline{\pi_\delta = X^4 - 1}$.

Problème

Partie I

1. On a $\underline{\dim(E_n) = n+1 \text{ et une base est } (X^k)_{k\in[0,n]}}$.

2. $\diamond\ \forall P \in E,\ u(P) = P' \in E$ et $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ u(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)' = P'+\lambda Q' = u(P)+\lambda u(Q)$ donc $\underline{u \in \mathcal{L}(E)}$.
De plus, si $\deg(P) \neq 0$, $\deg(P') = \deg(P) - 1$ et si $\deg(P) = 0$, $\deg(P') = -\infty$ donc $\underline{u(E_n) \subset E_n}$.
$\diamond$ Si $P \neq 0$ et $\deg(P) = d$ avec $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ alors $v(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{d} a_k (X^k + kX^{k-1} + \cdots) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \cdots$ donc $\underline{v(E_n) \subset E_n}$.
On a donc $\forall P \in E,\ v(P) \in E$ et $\forall (P,Q) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ v(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)(X+1) = P(X+1) + \lambda Q(X+1) = v(P) + \lambda v(Q)$ donc $\underline{v \in \mathcal{L}(E)}$.

3. $\diamond\ u(1) = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u(X^k) = k\,X^{k-1}$ donc $\underline{U_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$

$\diamond\ \forall k \in \mathbb{N},\ v(X^k) = (X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$ donc $\underline{V_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \binom{2}{1} & \vdots & \vdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})}$

4. $\diamond\ P' = 0$ si et seulement si P est constant donc $\underline{\mathrm{Ker}(u_n) = E_0}$ et $\mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Vect}(u_n(1), u_n(X), \ldots, u_n(X^n)) = \mathrm{Vect}(0, 1, \ldots, nX^{n-1})$ donc $\underline{\mathrm{Im}(u_n) = E_{n-1}}$.
$\diamond\ \det(v_n) = \det(V_n) = 1 \neq 0$ donc v_n est un automorphisme de E_n et donc $\underline{\mathrm{Ker}(v_n) = \{0\}}$ et $\underline{\mathrm{Im}(v_n) = E_n}$.

5. On a $\forall P \in E,\ u \circ v(P) = \big(P(X+1)\big)' = P'(X+1) = v \circ u(P)$ donc $\underline{u_n \text{ et } v_n \text{ commutent}}$.

6. $\diamond\ \chi_{u_n} = \chi_{U_n}$ donc $\underline{\chi_{u_n} = X^{n+1}}$.$\diamond$ Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n+1$ et l'espace propre associé est $E_0(u_n) = \mathrm{Ker}(u_n) = E_0 \neq E_n$ car $n \in \mathbb{N}^*$ donc $\underline{u_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

7. $\diamond\ \chi_{v_n} = \chi_{V_n}$ donc $\underline{\chi_{v_n} = (X-1)^{n+1}}$.$\diamond$ Donc $\mathrm{Sp}(v_n) = \{1\}$ et donc si v_n était diagonalisable sa matrice dans une base de diagonalisation serait I_{n+1} et ceci serait vrai dans toute base donc $\underline{v_n \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

8. On a $\forall k \in [0,n],\ \deg(Q_k) = k$ donc la famille $(Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de degrés étagés donc $\underline{(Q_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \text{ est une base}}$

9. $\diamond\ w_n(Q_0) = v_n(Q_0) - Q_0 = Q_0 - Q_0$ donc $\underline{w_n(Q_0) = 0}$.$\diamond\ \forall k \geqslant 2,\ w_n(Q_k) = v_n(Q_k) - Q_k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j)$

$$= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\big[(X+1) - (X-k+$$

et, pour $k=1$, $w_n(Q_1)=(X+1)-X=1=Q_0$ donc $\underline{\forall k>1,\ w_n(Q_k)=Q_{k-1}}$.

3. $$W_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

4. On lit sur la matrice W_n : $\mathrm{rg}(W_n)=n$, $Q_0\in\mathrm{Ker}(w_n)$, $\forall k\in[\![0,n-1]\!],\ Q_k\in\mathrm{Im}(w_n)$ donc $\underline{\mathrm{Ker}(w_n)=\mathbb{R}.Q_0}$ et $\underline{\mathrm{Im}(w_n)=\mathrm{Vect}(Q_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}}$.

5. On a, par récurrence sur j, $w_n^j(Q_k)=\begin{cases}Q_{k-j} & \text{si } j\leqslant k\\ 0 & \text{si } j\ k\end{cases}$

9. 1. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E_n, $\underline{\forall P\in E_n,\ \exists!(\beta_k)_{0\leqslant k\leqslant n},\quad P=\sum_{k=0}^{n}\beta_kQ_k}$.

2. On a $w_n^j(P)=\sum_{k=0}^{n}\beta_kw_n^j(Q_k)=\sum_{k=j}^{n}\beta_kQ_{k-j}$ si $j\leqslant n$, 0 si $j\ n$. De plus, $Q_i(0)=1$ si $i=0$, 0 si $i>1$.
Donc $w_n^j(P)(0)=\beta_j$ si $j\leqslant n$, 0 si $j>n$.

3. Ainsi $\forall k\in[\![0,n]\!],\ \beta_k=w_n^k(P)(0)$. Or $w_n^k=(v_n-e_n)^k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{i}v_n^j$ car v_n et e_n commutent. Et, par récurrence facile, $v_n^j(P)(X)=P(X+j)$ donc $w_n^k(P)(X)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}P(X+j)$. En évaluant en 0, on obtient donc $\underline{\forall k\in[\![0,n]\!],\ \beta_k=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{i}P(j)}$.

4. Et donc la base duale de $\mathcal{B}$ est $\underline{\mathcal{B}^*=\left(Q_k^*\right)_{0\leqslant k\leqslant n}\text{ avec }Q_k^*(P)=w_n^k(P)(0)=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{i}P(j)}$.

10. ◇ Selon la question [8.5], $\forall k\in[\![0,n]\!],\ w_n^{n+1}(Q_k)=0$ donc $\underline{w_n^{n+1}=\theta_n}$.
◇ De la même question on tire $\underline{w_n^n(Q_n)=Q_0}$.

Partie II

1. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_f\in J_f$ donc $\underline{\pi_f\mid\chi_f}$.

2. 1. On a, par récurrence sur k, $\forall P\in E,\ u^k(P)=P^{(k)}$. Or, si $P\in E_n$ alors $\deg(P)<n+1$ donc $P^{(n+1)}=0$. Ainsi $\underline{u_n^{n+1}=\theta_n}$.

2. De même, $\underline{u_n^n(X^n)=n!}$ (en dérivant n fois).

3. Selon [1], $u_n^{n+1}=\theta_n$ donc $X^{n+1}\in J_{u_n}$ donc $\pi_{u_n}\mid X^{n+1}$ et donc $\exists\, m\leqslant n+1,\ \pi_{u_n}=X^m$. Si on avait $m\leqslant n$ alors $\pi_{u_n}\mid X^n$ donc $u_n^n=\theta_n$ mais ceci est faux selon [2]. Finalement, $\underline{\pi_{u_n}=X^{n+1}}$.

Selon [I.10], $w_n^{n+1}=\theta_n$ et $w_n^n\neq\theta_n$ donc, comme ci-dessus, $\underline{\pi_{w_n}=X^{n+1}}$.

3. $\pi_{v_n}\mid\chi_{v_n}=\chi_{v_n}=(X-1)^{n+1}$ donc $\underline{\exists\, m\in[\![1,n+1]\!],\ \pi_{v_n}=(X-1)^m}$.

Donc $(v_n-e_n)^m=\theta_n$ soit $w_n^m=\theta_n$ donc $\pi_{w_n}\mid X^m$ et donc, vu le résultat de [2.4], $\underline{m=n+1}$.

4. Puisque $\deg(P)=m$, on a $\underline{a_m\neq 0}$.

$$r\left(\frac{X^m}{m!}\right)=\sum_{j=0}^{m}a_ju^j\left(\frac{X^m}{m!}\right)=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_j}{m!}u^j(X^m)=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_j}{m!}\left(X^m\right)^{(j)}=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_j}{m!}m(m-1)\cdots(m-j+1)\,X^{m-j}=$$
$$\sum_{j=0}^{m}\frac{a_j}{m!}\frac{m!}{(m-j)!}X^{m-j}\text{ donc }\underline{r\left(\frac{X^m}{m!}\right)=\sum_{j=0}^{m}\frac{a_j}{(m-j)!}X^{m-j}}\ .$$

Ainsi $r\left(\dfrac{X^m}{m!}\right)\neq 0$ donc $r\neq\theta$ donc $\forall P\in\mathbb{R}[X]\setminus\{0\},\ P(u)\neq\theta$ donc $\underline{J_u=\{0\}}$.

5. Soit $P\in J_v$, on a $P(v)=\theta$ donc, par restriction à E_n stable par v, $P(v_n)=\theta_n$ donc $\pi_{v_n}\mid P$. Ceci donne bien, avec le résultat de [3.2], $\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (X-1)^{n+1}\mid P}$.

Donc $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \exists\, Q_n\in E,\ P=(X-1)^{n+1}Q_n$ donc $\deg(P)=n+1+\deg(Q_n)$. En prenant $n>\deg(P)$, ceci donne $\deg(Q_n)=-\infty$ donc $P=0$. Donc $\underline{J_v=\{0\}}$.

6. Soit $Q=s(P)$ et $R=s^2(P)$, on a $R(X)=Q(1-X)=P(1-(1-X))=P(X)$ donc $\underline{s^2=e\ (s\text{ involution})}$.

On a donc $X^2-1\in J_s$ et donc $J_s\neq\{0\}$. Ainsi s a un polynôme minimal π_s et $\pi_s\in\left\{X+1,X-1,X^2-1\right\}$. Or $s\neq e$ car $s(X)=1-X\neq X$ et, de même, $s\neq -e$ donc $\pi_s=X^2-1$ et $\underline{J_s=(X^2-1).\mathbb{R}[X]}$.

Partie III

1. $\exp(u_n)=\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{u_n^m}{m!}=\sum_{m=0}^{n}\frac{u_n^m}{m!}$ d'après [II.2.1]. On peut donner deux démonstrations de l'égalité demandée :

- Première démonstration :
Montrons que $\exp(u_n)$ et v_n coïncident sur la base canonique $\left(X^k\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$:

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\quad\begin{cases}v_n(X^k) & =(X+1)^k=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}X^{k-j}\\[2ex] \exp(u_n)(X^k) & =\displaystyle\sum_{m=0}^{n}\frac{u_n^m(X^k)}{m!}=\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}X^{m-k}\text{ selon [II.4.2]}\end{cases}$$

et donc $\underline{v_n=\exp(u_n)}$.

- Deuxième démonstration :
La formule de Taylor en X appliquée à $P\in E$ donne $P(X+h)=\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{P^{(m)}(X)}{m!}h^m$. En prenant $h=1$, on obtient $P(X+1)=\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{P^{(m)}(X)}{m!}=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{u_n^m(P)}{m!}$ soit $\underline{v_n=\exp(u_n)}$.

2. D'après [I.9.3], $\forall k\in[\![0,n]\!],\ u_n(Q_k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}w_n^j\left(u_n(Q_k)\right)(0)\,Q_j$. Or u_n et v_n commutent ([I.5]) donc u_n et $w_n=v_n-e_n$ également donc $w_n^j\left(u_n(Q_k)\right)=u_n\left(w_n^j(Q_k)\right)=u_n\left(Q_{k-j}\right)=u_n(0)$i $j>k$ d'après ([I.8.5]). Ceci donne $\forall k\in[\![0,n]\!],\ u_n(Q_k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{k}u_n\left(Q_{k-j}\right)(0)\,Q_j$ soit $\underline{\forall k\in[\![0,n]\!],\ u_n(Q_k)=\displaystyle\sum_{m=0}^{k}u_n\left(Q_m\right)(0)\,Q_{k-m}}$.

Fin