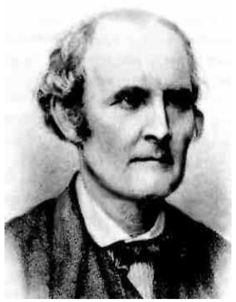
DL 1 Endomorphismes cycliques.

Blague du jour

Un vieux milliardaire téléphone à une conseillère : J'ai 60 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 20 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis il y a quelques année, j'avais juste 50 ans ? La conseillère lui répond : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que quelques année, vous approchez des 80 ans !



Mathématicien du jour

Arthur Cayley (1821-1895)

Mathématicien et avocat britannique, l'un des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Il a donné le premier, une définition qui s'approche de la notion moderne de groupe. Il a reçu la Médaille Copley en 1882. On lui doit aussi la découverte des nombres de Cayley, les octonions.

Énoncé (extrait cnc 99, MP)

Dans tout le problème $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique (ou monogène) s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $\left(f^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ engendre E. Dans tout le problème (sauf mention du contraire) f est un endomorphisme cyclique.

Partie I : Propriété caractéristique des endomorphismes cycliques

① Justifier l'existence de l'entier p maximal tel que $\mathcal{F} = \left(x_0, \dots, f^{p-1}(x_0)\right)$ soit libre.

② Montrer que $f^k(x_0)$ est combinaison linaire de $\mathcal{F}$ pour tout entier $k \geq p$.

③ En déduire que $\mathcal{B} = \left(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E.

④ En déduire que $\deg \pi_f = n$, comparer π_f et χ_f.

⑤ On ne suppose plus f cyclique, mais que $\deg \pi_f = n$ et on se propose de montrer que f est effectivement cyclique.

a Pour tout $x \in E$, on note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$. Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, engendré par un unique polynôme unitaire, qu'on notera $\pi_{f,x}$.

b Dire pourquoi $\pi_{f,x} = \pi_f$.

c En déduire que f est cyclique.

⑥ Montrer que les assertions suivantes sont équivalents :

a f est cyclique.

b $\deg \pi_u = n$.

c $\chi_u = (-1)^n \pi_u$.

d $\exists x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{(n-1)}(x_0))$ soit une base de E.

e $(\mathrm{id}, f, \dots, f^{n-1})$ libre dans $\mathcal{L}(E)$.

Partie II : Commutant d'un endomorphisme cyclique

① Soit un endomorphisme $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec f.

a Dire pourquoi que $\exists (a_k)_{0 \leq n-1} \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0)$

b Montrer que $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.

c En déduire que $g = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.

② En déduire une base et la dimension du commutant de f, défini par $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f\}$

Partie III : Polynôme minimal en un vecteur.

Soit $u \in \mathcal{L}(()E)$ et $x \in E$ avec $x \neq 0$. On pose $E_u(x) = \{P(u)(x);\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

① Montrer que $E_u(x)$ est un sous-espace vectoriel de E, stable par u et non réduit à $\{0\}$.
On note par u_x l'endomorphisme induit par u sur $E_u(x)$.

② Si $x \in \ker u$, donner la forme générale des éléments de $E_u(x)$, donner en particulier $\dim E_u(x)$

③ Même question si cette fois x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre λ de u.

④ On note par $\mathcal{I}_x$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u)(x) = 0$.

a Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $E_u(x)$ est stable par $P(u)$.

b Soit $P \in \mathcal{I}_x$, montrer que $P(u)$ induit sur $E_u(x)$ l'endomorphisme nul.

c Montrer que $\mathcal{I}_x$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non nul, engendré par un polynôme unitaire, qu'on va noter $\pi_{u,x}$ et appelé polynôme minimal de u en x.

⑤ a Dire pourquoi $\pi_{u,x}$ divise π_u.

b Donner un exemple où :

i $\pi_u = \pi_{u,x}$.

ii $\pi_{u,x}$ divise strictement π_u.

c Donner $\pi_{x,u}$ quand $x \in \ker u$.

⑥ Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x et u pour que $\deg(\pi_{u,x}) = 1$.

⑦ On suppose que u est un projecteur non nul, différent de l'identité. Rappeler son polynôme minimal, ainsi que celui de x quand $x \in \operatorname{Im} u$.

⑧ On suppose dans cette question que $\deg(\pi_{u,x}) = k \geq 2$ avec $\pi_{u,x} = X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$.

a Montrer que $\mathcal{B}_x = (x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ est une base de $E_u(x)$.

b Que peut-on alors dire de l'espace $E_u(x)$.

c En déduire $\dim E_u(x)$.

b Donner la forme de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_x}(u_x)$.

c En déduire que $\pi_{u_x} = \pi_{u,x}$.

Partie IV : Application

☞ Un endomorphisme u est dit irréductible si et seulement si $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espace vectoriel de E stables par u.

☞ On se propose de montrer que : u est irréductible si et seulement si χ_u est un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$.

☞ On rappelle qu'un polynôme non constant P est dit irréductible si et seulement si ses seuls diviseurs sont les polynômes constants et ses polynômes associés de la forme λP où $\lambda \neq 0$

Pour cela pour tout $x \in E$, on pose $\mathbb{K}_u[x] = \{P(u)(x)$ tel que $P \in \mathbb{K}[X]\}$, appelé sous-espace cyclique engendré par x

① On suppose que χ_u est irréductible.

a Si $x \neq 0$, montrer que $\chi_u = \pi_u = \pi_{x,u}$.

b En déduire que $\mathbb{K}_u[x] = E$, puis conclure.

② Réciproquement, on suppose que u est irréductible.

a Soit $x \neq 0$, montrer que $\mathbb{K}_u[X] = E$.

b Supposons qu'il existe P un diviseur non trivial de χ_u et soit $y = P(u)(x)$. Montrer que $\pi_{y,u} = \dfrac{\chi_u}{P}$, puis en déduire une contradiction.

c Conclure

Á la prochaine