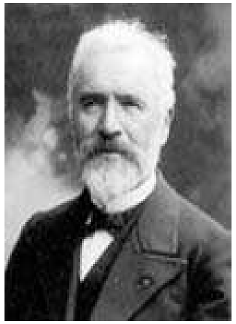
.

Corrigé Pr. Dufait, CPGE France

Blague du jour

- Quelle est la différence entre un prof à la retraite et le sang ?
Y'en a pas, dans les deux cas il sort du corps enseignant (en saignant).
- Heureux l'étudiant qui, comme la rivière, arrive à suivre son cours sans sortir de son lit.



Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)

Mathématicien français, connu à la fois pour son travail fondamental dans la théorie des groupes et pour son influent Cours d'analyse. C'est un poyltechnicien (1855) fils de polytechnicie (1818). Il enseigna à l'École polytechnique et succéda à Liouville au Collège de France, où il avait une réputation de choix de notation excentriques.

Mathématicien du jour

Questions de cours et exemples

1. Un polynôme annulateur de f est un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

2. J_f est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ (et accessoirement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$).

3. Si $J_f \neq \{0\}$, le polynôme minimal de f est l'unique polynôme unitaire π_f tel que $J_f = \pi_f.\mathbb{R}[X]$. C'est aussi le polynôme unitaire appartenant à J_f de plus petit degré.

4. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $J_f \neq \{0\}$ puisque le polynôme caractéristique de f, χ_f appartient à J_f.

5. 1. On a $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ donc $M^2 = M$ et donc, par récurrence, $\underline{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = M}$.

2. Ainsi $X^2 - X \in J_f$ donc $\pi_f \mid X^2 - X = X(X-1)$ et donc $\pi_f \in \{X, X-1, X^2 - X\}$ (1 n'est pas annulateur si $E \neq \{0\}$). Or $M \neq 0$ et $M \neq I_4$ donc $\underline{\pi_f = X^2 - X}$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com
مَمُوني مُولَاي اسمَاعِيل

6. 1. ◇ L'équation homogène $y''+y=0$ est à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2+1=0$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ de $y''+y=0$ sont les fonctions $x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)$ pour $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
Comme $\text{ch}''=\text{ch}$, une solution particulière de $y''+y=\text{ch}(x)$ est la fonction $x\mapsto\frac{1}{2}\text{ch}(x)$ donc les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=\text{ch}(x)$ sont les $y:\ x\mapsto\frac{1}{2}\text{ch}(x)+A\cos(x)+B\sin(x)$ pour $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

◇ De même, les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y''+y=\text{sh}(x)$ sont les fonctions $x\mapsto\frac{1}{2}\text{sh}(x)+A\cos(x)+B\sin(x)$ pour $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

2. Puisque f est supposée de classe C^4 sur $\mathbb{R}$ alors g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc :

$$\begin{aligned}\big(f \text{ solution de } (H_1)\big) &\iff \big(\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(4)}(x)=f(x)\big)\\ &\iff \big(\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(4)}(x)+f''(x)=f(x)+f''(x)\big)\\ &\iff \big(\forall x\in\mathbb{R},\ g''(x)=g(x)\big)\end{aligned}$$

donc $\big(f \text{ solution de } (H_1)\big)\iff\big(g=f''+f \text{ solution de } y''=y\big)$.

3. $(H_2):\ y''-y=0$ est linéaire, homogène, à coefficients constants et a pour équation caractéristique $X^2-1=0$ donc a pour solutions les fonctions $x\mapsto A\,e^{x}+B\,e^{-x}$ avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$, ou aussi, les solutions de (H_2) sont les $y:\ x\mapsto A\,\text{ch}(x)+B\,\text{sh}(x)$ pour $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.

4. Le principe de superposition des solutions et les résultats de la question [6.1] donnent :
les solutions de (H_1) sont les $y:\ x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)+C\,\text{ch}(x)+D\,\text{sh}($

5. 1. Par définition de E, la famille $(\cos,\sin,\text{ch},\text{sh})$ en est génératrice. De plus, si $A\cos+B\sin+C\,\text{ch}+D\,\text{sh}=0$ alors, en dérivant deux fois, $-A\cos-B\sin+C\,\text{ch}+D\,\text{sh}=0$ donc $A\cos+B\sin=0$ et $C\,\text{ch}+D\,\text{sh}=0$. En prenant les valeurs en 0 (par exemple), on obtient $A=B=C=D=0$ donc cette famille est libre etc'est donc une base de E. Ainsi $\dim(E)=4$.

2. La dérivation est linéaire et $(A\cos+B\sin+C\,\text{ch}+D\,\text{sh})'=-A\sin+B\cos+C\,\text{sh}+D\,\text{ch}\in E$ donc E est stable. Donc la dérivation induit bien un endomorphisme de E.

3. D'après [6.4], E est l'ensemble des solutions de (H_1) donc $\forall y\in E$, $y^{(4)}=\delta^4(y)=y$. Ainsi $X^4-1\in J_\delta$ et $\pi_\delta\mid X^4-1$. Si $\pi_\delta\neq X^4-1$ alors $\deg(\pi_\delta)\leq 3$ donc $\pi_\delta=\sum_{i=0}^{3}a_iX^i$. On alors

$$\begin{aligned}\forall(A,B,C,D)\in\mathbb{R}^4,\quad 0&=\pi_\delta(\delta)\big[A\cos+B\sin+C\ \cdots\\ &=\sum_{i=0}^{3}a_i\big[A\cos+B\sin+C\ \cdots\\ &=\big((a_0-a_2)A+(a_3-a_1)B\big)\cos+\big((a_0\ \cdots\\ &\quad+\big((a_0+a_2)C+(a_1+a_3)D\big)\,\text{ch}\ \cdots\end{aligned}$$

donc, par liberté de $(\cos,\sin,\text{ch},\text{sh})$,

$$\forall(A,B,C,D)\in\mathbb{R}^4,\quad\begin{cases}(a_0-a_2)A+(a_3-a_1)B=0\\(a_0-a_2)B+(a_1-a_3)A=0\\(a_0+a_2)C+(a_1+a_3)D=0\\(a_0+a_2)D+(a_1+a_3)C=0\end{cases}$$

soit $a_0=a_2=-a_0$ et $a_1=a_3=-a_1$ donc $a_0=a_1=a_2=a_3=0$ ce qui est absurde. Donc $\pi_\delta=X^4-1$.

Problme

Partie I

1. On a $\dim(E_n)=n+1$ et une base est $\left(X^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

2. $\diamond$ $\forall P\in E,\ u(P)=P'\in E$ et $\forall(P,Q)\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ u(P+\lambda Q)=(P+\lambda Q)'=P'+\lambda Q'=u(P)+\lambda u(Q)$ donc $u\in\mathcal{L}(E)$.
De plus, si $\deg(P)\neq 0$, $\deg(P')=\deg(P)-1$ et si $\deg(P)=0$, $\deg(P')=-\infty$ donc $u(E_n)\subset E_n$.

$\diamond$ Si $P\neq 0$ et $\deg(P)=d$ avec $P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$ avec $a_d\neq 0$ alors $v(P)=\sum_{k=0}^{d}a_k(X+1)^k=\sum_{k=0}^{d}a_k\left(X^k+kX^{k-1}+\cdots\right)=a_dX^d+\left(da_d+a_{d-1}\right)X^{d-1}+\cdots$ donc $v(E_n)\subset E_n$.
On a donc $\forall P\in E,\ v(P)\in E$ et $\forall(P,Q)\in E^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ v(P+\lambda Q)=(P+\lambda Q)(X+1)=P(X+1)+\lambda Q(X+1)=v(P)+\lambda v(Q)$ donc $v\in\mathcal{L}(E)$.

3. $\diamond$ $u(1)=0$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ u(X^k)=k\,X^{k-1}$ donc

$$U_n=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&n\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

$\diamond$ $\forall k\in\mathbb{N},\ v(X^k)=(X+1)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}X^i$ donc

$$V_n=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&\cdots&1\\0&1&\binom{2}{1}&\vdots&\vdots&\binom{n}{1}\\\vdots&\ddots&1&\ddots&&\binom{n}{2}\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&\ddots&1&\binom{n}{n-1}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

4. $\diamond$ $P'=0$ si et seulement si P est constant donc $\mathrm{Ker}(u_n)=E_0$ et $\mathrm{Im}(u_n)=\mathrm{Vect}(u_n(1),u_n(X),\ldots,u_n(X^n))=\mathrm{Vect}\left(0,1,\ldots,nX^{n-1}\right)$ donc $\mathrm{Im}(u_n)=E_{n-1}$.
$\diamond$ $\det(v_n)=\det(V_n)=1\neq 0$ donc v_n est un automorphisme de E_n et donc $\mathrm{Ker}(v_n)=\{0\}$ et $\mathrm{Im}(v_n)=E_n$.

5. On a $\forall P\in E,\ u\circ v(P)=\left(P(X+1)\right)'=P'(X+1)=v\circ u(P)$ donc u_n et v_n commutent .

6. $\diamond$ $\chi_{u_n}=\chi_{U_n}$ donc $\chi_{u_n}=X^{n+1}$.$\diamond$ Donc 0 est valeur propre de multiplicité $n+1$ et l'espace propre associé est $E_0(u_n)=\mathrm{Ker}(u_n)=E_0\neq E_n$ car $n\in\mathbb{N}^*$ donc u_n n'est pas diagonalisable .

7. $\diamond$ $\chi_{v_n} = \chi_{V_n}$ donc $\chi_{v_n} = (X-1)^{n+1}$.$\diamond$ Donc $\mathrm{Sp}(v_n) = \{1\}$ et donc si v_n était diagonalisable sa matrice dans une base de diagonalisation serait I_{n+1} et ceci serait vrai dans toute base donc v_n n'est pas diagonalisable .

8. 1. On a $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(Q_k) = k$ donc la famille $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une famille de degrés étagés donc $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de E_n .

2. $\diamond$ $w_n(Q_0) = v_n(Q_0) - Q_0 = Q_0 - Q_0$ donc $w_n(Q_0) = 0$.

$$\begin{aligned} w_n(Q_k) &= v_n(Q_k) - Q_k = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{j=-1}^{k-2}(X-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \\ &= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\left[(X+1)-(X-k+1)\right] \\ &= \frac{k}{k!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X-j) \end{aligned}$$

et,

pour $k = 1$, $w_n(Q_1) = (X+1) - X = 1 = Q_0$ donc $\forall k sup 1$, $w_n(Q_k) = Q_{k-1}$.

3. $$W_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

4. On lit sur la matrice W_n : $\mathrm{rg}(W_n) = n$, $Q_0 \in \mathrm{Ker}(w_n)$, $\forall k \in [\![0,n-1]\!]$, $Q_k \in \mathrm{Im}(w_n)$ donc $\mathrm{Ker}(w_n) = \mathbb{R}.Q_0$ et $\mathrm{Im}(w_n) = \mathrm{Vect}(Q_k)_{0\leq k\leq n-1}$.

5. On a, par récurrence sur j, $w_n^j(Q_k) = \begin{matrix} Q_{k-j} & si & j \leq k \\ 0 & si & j k \end{matrix}$

9. 1. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de E_n, $\forall P \in E_n$, $\exists!(\beta_k)_{0\leq k\leq n}$, $P = \sum_{k=0}^{n}\beta_k Q_k$.

2. On a $w_n^j(P) = \sum_{k=0}^{n}\beta_k w_n^j(Q_k) = \sum_{k=j}^{n}\beta_k Q_{k-j} sij \leq n$,
$0 sij n$. De plus, $Q_i(0) = 1$ si $i = 0$, 0si $isup1$.
Donc $w_n^j(P)(0) = \beta_j$ si $j \leq n$, 0 si $j > n$.

3. Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\beta_k = w_n^k(P)(0)$. Or $w_n^k = (v_n - e_n)^k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{i}v_n^j$ car v_n et e_n commutent. Et, par récurrence facile, $v_n^j(P)(X) = P(X+j)$ donc $w_n^k(P)(X) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}P(X+j)$. En évaluant en 0, on obtient donc $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\beta_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{i}P(j)$.

4. Et donc la base duale de $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B}^* = (Q_k^*)_{0\leq k\leq n}$ avec $Q_k^*(P) = w_n^k(P)(0) = \sum_{j=0}^{k}$

10. ◇ Selon la question **[8.5]**, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $w_n^{n+1}(Q_k) = 0$ donc $\underline{w_n^{n+1} = \theta_n}$.

◇ De la même question on tire $\underline{w_n^n(Q_n) = Q_0}$.

Partie II

1. Le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_f \in J_f$ donc $\underline{\pi_f \mid \chi_f}$.

2. 1. On a, par récurrence sur k, $\forall P \in E$, $u^k(P) = P^{(k)}$. Or, si $P \in E_n$ alors $\deg(P) < n+1$ donc $P^{(n+1)} = 0$. Ainsi $\underline{u_n^{n+1} = \theta_n}$.

2. De même, $\underline{u_n^n(X^n) = n!}$ (en dérivant n fois).

3. Selon **[1]**, $u_n^{n+1} = \theta_n$ donc $X^{n+1} \in J_{u_n}$ donc $\pi_{u_n} \mid X^{n+1}$ et donc $\exists\, m \leq n+1$, $\pi_{u_n} = X^m$. Si on avait $m \leq n$ alors $\pi_{u_n} \mid X^n$ donc $u_n^n = \theta_n$ mais ceci est faux selon **[2]**. Finalement, $\underline{\pi_{u_n} = X^{n+1}}$.

4. Selon **[I.10]**, $w_n^{n+1} = \theta_n$ et $w_n^n \neq \theta_n$ donc, comme ci-dessus, $\underline{\pi_{w_n} = X^{n+1}}$.

3. 1. $\pi_{v_n} \mid \chi_{v_n} = \chi_{V_n} = (X-1)^{n+1}$ donc $\underline{\exists\, m \in [\![1, n+1]\!],\ \pi_{v_n} = (X-1)^m}$.

2. Donc $(v_n - e_n)^m = \theta_n$ soit $w_n^m = \theta_n$ donc $\pi_{w_n} \mid X^m$ et donc, vu le résultat de **[2.4]**, $\underline{m = n+1}$.

4. 1. Puisque $\deg(P) = m$, on a $\underline{a_m \neq 0}$.

2. $r\left(\dfrac{X^m}{m!}\right) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m} a_j u^j \left(\dfrac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} \dfrac{a_j}{m!} u^j(X^m) = \sum_{j=0}^{m} \dfrac{a_j}{m!} (X^m)^{(j)} = \sum_{j=0}^{m} \dfrac{a_j}{m!} m(m-1)\cdots(m-j+1)\, X^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} \dfrac{a_j}{m!} \dfrac{m!}{(m-j)!} X^{m-j}$ donc

$$\underline{r\left(\frac{X^m}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{m} \frac{a_j}{(m-j)!} X^{m-j}}.$$

3. Ainsi $r\left(\dfrac{X^m}{m!}\right) \neq 0$ donc $r \neq \theta$ donc $\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, $P(u) \neq \theta$ donc $\underline{J_u = \{0\}}$.

5. 1. Soit $P \in J_v$, on a $P(v) = \theta$ donc, par restriction à E_n stable par v, $P(v_n) = \theta_n$ donc $\pi_{v_n} \mid P$. Ceci donne bien, avec le résultat de **[3.2]**, $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (X-1)^{n+1} \mid P}$.

2. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists\, Q_n \in E$, $P = (X-1)^{n+1} Q_n$ donc $\deg(P) = n + 1 + \deg(Q_n)$. En prenant $nsup \deg(P)$, ceci donne $\deg(Q_n) = -\infty$ donc $P = 0$. Donc $\underline{J_v = \{0\}}$.

6. 1. Soit $Q = s(P)$ et $R = s^2(P)$, on a $R(X) = Q(1-X) = P(1-(1-X)) = P(X)$ donc $\underline{s^2 = e\ (s \text{ involution})}$.

2. On a donc $X^2 - 1 \in J_s$ et donc $J_s \neq \{0\}$. Ainsi s a un polynôme minimal π_s et $\pi_s \in \left\{X+1, X-1, X^2-1\right\}$. Or $s \neq e$ car $s(X) = 1 - X \neq X$ et, de même, $s \neq -e$ donc $\pi_s = X^2 - 1$ et $\underline{J_s = (X^2-1).\mathbb{R}[X]}$.

Partie III

1. $\exp(u_n) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m}{m!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{u_n^m}{m!}$ d'après **[II.2.1]**. On peut donner deux démonstrations de l'égalité demandée :

- **Première démonstration :**
Montrons que $\exp(u_n)$ et v_n coïncident sur la base canonique $(X^k)_{0\leq k\leq n}$:

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \begin{cases} v_n(X^k) & = (X+1)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^{k-j} \\ \exp(u_n)(X^k) & = \sum_{m=0}^{n} \frac{u_n^m(X^k)}{m!} = \sum_{m=0}^{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} X^{m-k} \end{cases}$$

et donc $\underline{v_n = \exp(u_n)}$.

- **Deuxième démonstration :**

La formule de Taylor en X appliquée à $P \in E$ donne $P(X+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} h^m$. En prenant $h = 1$, on obtient $P(X+1) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{P^{(m)}(X)}{m!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{u_n^m(P)}{m!}$ soit $\underline{v_n = \exp(u_n)}$.

2. 1. D'après **[I.9.3]**, $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^{n} w_n^j\left(u_n(Q_k)\right)(0)\, Q_j$. Or u_n et v_n commutent (**[I.5]**) donc u_n et $w_n = v_n - e_n$ également donc $w_n^j\left(u_n(Q_k)\right) = u_n\left(w_n^j(Q_k)\right) = u_n\left(Q_{k-j}\right)$ si $j \leq k$. $= u_n(0)$i $j > k$ d'après (**[I.8.5]**). Ceci donne $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $u_n(Q_k) = \sum_{j=0}^{k} u_n\left(Q_{k-j}\right)(0)\, Q_j$ soit selon **[II.4.2]**

$$\underline{\forall k \in [\![0,n]\!],\ u_n(Q_k) = \sum_{m=0}^{k} u_n\left(Q_m\right)(0)\, Q_{k-m}}\ .$$