Corrigé Problème I : Pr. Devulder, CPGE France

Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Les $n-1$ premières colonnes de $J(0)$ sont clairement indépendantes. La dernière est nulle et donc combinaison des $n-1$ premières. Le rang de $J(0)$ vaut donc $n-1$.

2.1. Soit j l'endomorphisme canoniquement associé à J et $(u_1,\dots,u_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a alors

$$\forall l \in [1..n-1],\ j(e_l) = e_{l+1} \text{ et } j(e_n) = 0$$

On en déduit alors, en itérant, que pour $k \in [1..n-1]$,

$$\forall l \in [1, n-k],\ j^k(e_l) = e_{l+k} \text{ et } \forall l \in [n-k+1, n],\ j^k(e_l) = 0$$

On en déduit que $J(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & \vdots \\ 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

où la diagonale de 1 commence sur la ligne $k+1$. On peut aussi écrire que

$$\forall i,j \in [1..n],\ (J(0)^k)_{i,j} = \delta_{j+k,j}$$

On remarque que cei est encore valable si $k = 0$ (on obtient alors la matrice I_n).

On en déduit aussi que $j^n(e_l) = 0$ pour tout l et que donc $J(0)^n = O_n$ et donc (on continue à multiplier par $J(0)$ et on obtient toujours la matrice nulle) :

$$\forall k \geq n,\ J(0)^k = O_n$$

2.2. Soit $k \geq 1$ (l'énoncé oublie de préciser que l'exposant n'est pas nul). $(J(0)^k)^n = J(0)^{nk} = O_n$ car $nk \geq n$. $J(0)^k$ est donc nilpotente.

3. Dans la somme définissant $\alpha(J(0))$, il n'y a qu'un nombre fini de matrices non nulles et on vient de les calculer :

$$\alpha(J(0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{1!} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{(n-1)!} & \dots & \frac{1}{1!} & 1 \end{pmatrix} = (v_{i,j}) \text{ avec } v_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \leq \\ \dfrac{1}{(i-j)!} \end{cases}$$

$U = \alpha(J(0)) - I_n$ est la même matrice où l'on a remplacé les 1 diagonaux par des zéros.

4. Soient A et B deux matrices nilpotentes qui commutent. On peut trouver des entiers p et q tels que $A^p = B^q = O_n$. Soient α, β deux scalaires. Comme A et B commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir

$$(\alpha A + \beta B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} \alpha^k \beta^{p+q-k} A^k B^{p+q-k}$$

Si $k \geq p$, $A^k = A^p A^{k-p}$ est nulle et si $k \leq p$ alors $p+q-k \geq q$ et c'est alors B^{p+q-k} qui est nulle. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls et $(A+B)^{p+q} = O_n$. $\alpha A + \beta B$ est nilpotente.

On en déduit par récurrence que pour tout p, une combinaison linéaire de p matrices nilpotentes qui commutent deux à deux est encore une matrice nilpotente.

5. On a

$$U = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} J^k$$

qui est une combinaison linéaire de matrices nilpotentes qui commutent deux à deux. Avec la question précédente, U est nilpotente.
Les $n-1$ premières colonnes de U sont indépendantes (famille "échelonnée" dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$) et la dernière est nulle (et donc combinaison des précédentes). U est donc de rang $n-1$.

Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

1. Soient $i, j \in \mathbb{N}$, on a
$$\forall x \in E,\ u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x))$$
Si $u^i(x) = 0$ alors $u^{i+j}(x) = u^j(0) = 0$ et on a donc l'inclusion
$$\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$$

2. En particulier, la suite $(\ker(u^m))_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion et, en passant aux dimension, la suite $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par la dimension de E, elle converge. Et comme elle est constituée d'entiers, elle est stationnaire à partir d'un certain rang. Il existe donc un entier m_0 tel que $t_{m_0} = t_{m_0+1}$ et l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}/\ t_m = t_{m+1}\}$ est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum (ce qui est mieux qu'une borne inférieure). On peut poser
$$r = \min\{m \in \mathbb{N}/\ t_m = t_{m+1}\}$$

3. Par définition de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$. On a donc $\ker(u^m) \subset \ker(u_{m+1})$ et les sous-espaces n'ayant pas même dimension, l'inclusion est stricte.
r étant un minimum, on a $t_r = t_{r+1}$. Comme $\ker(u^r) \subset \ker(u_{r+1})$ et comme on a égalité des dimensions, on a donc $\ker(u^r) = \ker(u_{r+1})$.

Enfin, on montre par récurrence sur l'entier m que l'affirmation
$$\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$$
est vraie pour tout $m \geq r$.

- Initialisation : on a vu que le résultat était vrai pour $m = r$.
- Etape de récurrence : soit $m \geq r$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang m. Soit $x \in \ker(u^{m+2})$; on a $u^{m+1}(u(x)) = 0$ et donc $u(x) \in \ker(u^{m+1})$. Par hypothèse de récurrence, $\ker(u^m) = \ker(u_{m+1})$ et donc $u^m(u(x)) = 0$ c'est à dire $x \in \ker(u^{m+1})$. On a prouvé que $\ker(u^{m+2}) \subset \ker(u_{m+1})$ et comme l'inclusion réciproque a déjà été prouvée, on a l'égalité et le résultat au rang $m+1$.

Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

1.1. On a
$$\mathrm{Im}(w) = v^q(\mathrm{Im}(v^p)) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$$

1.2. $w(x) = 0$ équivaut $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$ c'est à dire à $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $v^q(x) = 0$. On a donc
$$\ker(w) = \mathrm{Im}(v^p) \cap \ker(v^q) \subset \ker(v^q)$$

1.3. D'après le théorème du rang,
$$\dim(\mathrm{Im}(w)) + \dim(\ker(w)) = \dim(\mathrm{Im}(v^p))$$
En utilisant les deux questions précédentes, on a donc
$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q)) + \dim(\mathrm{Im}(v^{p+q}))$$
Le théorème du rang donne aussi
$$\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(E) - \dim(\ker(v^p))$$
$$\dim(\mathrm{Im}(v^{p+q})) = \dim(E) - \dim(\ker(v^{p+q}))$$

En injectant ces relations dans l'inégalité, on obtient
$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$

1.4. On prouve le résultat demandé par récurrence sur i.

- Initialisation : le résultat est vrai pour $i = 1$ car v est de rang $n-1$ et donc $\dim(\ker(v)) = 1$ (l'inégalité est une égalité).
- Etape de récurrence : soit $i \in [1..n-1]$ tel que le résultat soit vrai jusqu'au rang i. La question précédente indique que
$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq \dim(\ker(v^i)) + \dim(\ker(v))$$
Comme $\ker(v)$ est de dimension 1 et comme le résultat est vrai au rang i, on a donc
$$\dim(\ker(v^{i+1})) \leq i+1$$
ce qui prouve le résultat au rang $i+1$.

1.5. v étant nilpotente, on a $v^n = 0$ et $\dim(\ker(v^n)) = n$. D'après la partie 3 la suite $(\dim(\ker(v^i)))_{i\in\mathbb{N}}$ commence par croître strictement puis stationne à la valeur n. D'après la question précédente, elle ne peut donc pas stationner avant le rang n et on a
$$1 = \dim(\ker(v)) < \dim(\ker(v^2)) < \cdots < \dim(\ker(v^n)) \leq n$$
Pour que ces inégalité puissent avoir lieu, on doit nécessairement avoir
$$\forall i \in [1..n],\ \dim(\ker(v^i)) = i$$

2. Comme $\ker(v^{n-1})$ est de dimension $n-1$, il n'est pas égal à E et $v \neq \theta$.

3. Il existe donc $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$. Montrons que $(e, v(e), \ldots, v^{n-1}(e))$ est libre. Pour cela, on suppose que
$$\alpha_0 e + \alpha_1 v(e) + \cdots + \alpha_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$$
On a bien sur $v^k = \theta$ pour tout $k \geq N$.
En composant par v^{n-1}, on a alors $\alpha_0 v^{n-1}(e) = 0$ et donc $\alpha_0 = 0$.
Si on compose par v^{n-2}, on obtient de même $\alpha_1 = 0$. C'est donc un processus récurrent qui nous permet de montrer la nullité de tous les α_i.
La famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments : c'est une base de E.

4. La matrice de v dans cette base est tout simplement $J(0)$.

5. Si v et w sont deux endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ alors il existe des bases dans lesquelles ces deux endomorphismes sont représentés par $J(0)$. Les matrices de ces endomorphismes sont donc semblables (transitivité de la relation de similitude).
Il est difficile de savoir ce qu'attend l'énoncé à la question "déterminer tous les endomorphismes nilpotents d'ordre $n-1$". On peut, per exemple, dire que ce sont ceux dont la matrice dans la base canonique est semblable à $J(0)$.

Corrigé Problème II : Pr. Devulder, CPGE France

1.1. $(u, l(u), \ldots, l^n(u))$ est une famille de $n+1$ vecteurs de E qui est de dimension n et cette famille est donc liée. L'ensemble
$$A = \{k \in \mathbb{N} /\ (u, l(u), \ldots, l^k(u)) \text{ est liée}\}$$
est donc non vide. Comme il est inclus dans $\mathbb{N}$, il possède un minimum $r(l,u)$.

1.2. u étant non nul, $r(l,u) \geq 1$ (la famille (u) est libre et $0 \notin A$). On a de plus vu que $n \in A$ et on a donc aussi $r(l,u) \leq n$.

1.3. Si $r(l,u) = 1$ alors $(u, l(u))$ est liée. Comme $u \neq 0$, cela se traduit par l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $l(u) = \lambda u$ et u est vecteur propre de l. Réciproquement, si u est vecteur propre alors $(u, l(u))$ est liée et $1 \in A$. Comme $0 \notin A$ on a alors $r(l,u) = 1$.
Si $r(l,u) = n$ alors $n-1 \notin A$ et la famille $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est libre. Comme elle possède n élément et que E est de dimension n, c'est une base de E. Réciproquement, si $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E alors $n-1 \notin A$ et donc $r(l,u) \geq n$. Comme $r(l,u) \leq n$, on a en fait une égalité.

2. La trace de f est la somme des coefficients diagonaux de la matrice et $\det(f)$ son déterminant que l'on peut calculer avec une machine (par exemple). On obtient

$$\det(f) = 4 \text{ et } \mathrm{tr}(f) = 6$$

On a directement (les coordonnées s'entendent dans la base $\mathcal{B}$)

$$e_1 = (1,0,0,0),\ f(e_1) = (1,1,1,1),\ f^2(e_1) = (2,1,0,-1)$$

Si $ae_1 + bf(e_1) + cf^2(e_1) = 0$ alors $b = 0$ (troisième coordonnée) puis $c = 0$ (seconde coordonnée) puis $a = 0$. La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est donc libre. On obtient aussi

$$f^3(e_1) = (5,-1,-5,-9) = 2e_1 - 5f(e_1) + 4f^2(e_1)$$

et $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est liée. Par définition,

$$r(f, e_1) = 3$$

3.1. On a immédiatement

$$Mat_{\mathcal{B}(u)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

La trace est la somme des éléments diagonaux et le déterminant s'obtient en développant par rapport à la première ligne :

$$\mathrm{tr}(f) = a_{n-1} \text{ et } \det(f) = (-1)^{n+1} a_0$$

3.2. L'opération proposée laisse invariant le déterminant et amène à

$$\det(l - \lambda id) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda^{i-1} a_i - \lambda^n \\ 1 & -\lambda & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix}$$

Un développement par rapport à la première ligne donne ensuite

$$\det(f - \lambda id) = (-1)^n \left(\lambda^n - \sum_{i=0}^{n} \lambda^{i-1} a_i \right)$$

4.1. Un idéal d'un anneau commutatif A est un sous-groupe de A qui est stable par multiplication par un élément de A. On rapelle aussi que l'application $P \mapsto P(l)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$ ce qui indique en particulier que $(PQ)(l) = P(l) \circ Q(l)$.

- $\mathcal{I}(l,u)$ est une partie de $\mathbb{K}[X]$ qui est non vide (elle contient le polynôme nul par exemple, ou encore le polynôme caractéristique de l avec le théorème de Cayley-Hamilton).

- Si $P,Q \in \mathcal{L}(I,u)$ alors $(P+Q)(l)(u) = (P(l)+Q(l))(u) = P(l)(u)+Q(l)(u) = 0$. Ainsi, $P+Q \in \mathcal{L}(I,u)$.

- Si $P \in \mathcal{L}(I,u)$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $(PQ)(l)(u) = (QP)(l)(u) = Q(l) \circ P(l)(u) = Q(l)(0) = 0$ et $PQ \in \mathcal{L}(I,u)$.

Les deux premiers points donnent la structure de sous-groupe et avec le troisième on a celle d'idéal.
Le cours nous indique que tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ sont *principaux* c'est à dire du type $P\mathbb{K}[X]$ (ensemble des multiples de P). $\mathcal{I}(l,u)$ est donc l'ensemble des multiples d'un polynôme P (non nul car il y a dans $\mathcal{I}(l,u)$ un polynôme non nul : le polynôme caractéristique de l). En divisant P par son coefficient dominant on se ramène au cas où P est unitaire (et on ne change pas l'ensemble de ses multiples).
Si $G(l,u)$ convient, c'est un multiple unitaire de P et donc c'est forcément P.
On a ainsi prouvé qu'il existe un unique polynôme unitaire $G(l,u)$ tel que
$$\mathcal{I}(l,u) = G(l,u)\mathbb{K}[X]$$

4.2. Comme $\chi_l \in \mathcal{I}(l,u)$ (avec le théorème de Cayley-Hamilton qui donne $\chi_l(l)=0$), χ_l est multiple de $G(l,u)$.
Soit d le degré de $G(l,u)$; on peut donc écrire $G(l,u) = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$ et $G(l,u) \in \mathcal{I}(l,u)$ s'écrit
$$l^d(u) = -\sum_{k=0}^{d-1} a_k l^k(u)$$
d'où l'on tire que $d \geq r(l,u)$ (puisque $(u, l(u), \dots, l^d(u))$ est liée).
Par ailleurs, si $l^k(u)$ est combinaison linéaire de $(u,\dots,l^{k-1}(u))$, il existe des b_k tels que $l^k(u) = b_0 u + \cdots + b_{k-1}l^{k-1}(u)$ et donc $X^k - b_{k-1}X^{k-1} - \cdots - b_0 \in \mathcal{I}(l,u)$ et est multiple non nul de $G(l,u)$. On a ainsi $k \geq d$. On peut appliquer ceci avec $k = r(l,u)$ ($(u, l(u), \dots, l^{k-1}(u))$ est alors libre et $(u, l(u), \dots, l^k(u))$ liée donc $l^k(u)$ est combinaison linéaire de $(u,\dots,l^{k-1}(u))$) pour obtenir $r(l,u) \geq d$.
On a montré que
$$r(l,u) = \deg(G(l,u))$$

4.3. Avec l'analyse précédente, on obtient $G(f,e_1)$ grâce à la combinaison linéaire de $e_1, e(e_1), f^2(e_1)$ donnant $f^3(e_1)$:
$$G(l,e_1) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-2)(X-1)^2$$
Le polynôme caractéristique est multiple de $G(l,e_1)$ et admet donc 2 et 1 comme racines avec des multiplicités au moins égales à 1 (pour 2) et 2 (pour 1). Il s'écrit donc (son coefficient dominant vaut 1 car on est en dimension 4) $(X-a)(X-2)(X-1)^2$. Avec le déterminant (ou la trace) on trouve que $a=2$ et donc que
$$\chi_f = (X-1)^2(X-2)^2$$
Les valeurs propres de f sont ainsi 1 et 2.
Si f était diagonalisable, on aurait $(X-1)(X-2)$ qui annule f et donc $G(f,u)$ de degré ≤ 2 ce qui est faux. f n'est donc pas diagonalisable.

4.4. La situation est la même que ci-dessus et on obtient $G(l,u)$ grâce à la combinaison linéaire de $u,\dots,l^{n-1}(u)$ donnant $l^n(u)$:

$$G(l,u) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

χ_l est multiple de $G(l,u)$ et de coefficient dominant $(-1)^n$, c'est donc que

$$\chi_l = (-1)^n G(l,u) = (-1)^n \left(X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \right)$$

5.1. X^p annulant l, 0 est la seule valeur propre complexe possible pour l. Comme les racines de χ_l sont valeurs propres et que χ_l est scindé sur $\mathbb{C}$ (comme tout polynôme) et de coefficient dominant $(-1)^n$ et de degré n, c'est que

$$\chi_l = (-1)^n X^n$$

5.2. Supposons qu'il existe u non nul tel que $r(l,u) = n$. $G(l,u)$ est de degré n et donc $X^{n-1} \notin \mathcal{I}(l,u)$ ce qui donne $l^{n-1}(u) \neq 0$ et donc a fortiori $l^{n-1} \neq 0$.
Réciproquement, si $l^{n-1} \neq 0$, il existe u tel que $l^{n-1}(u) \neq 0$. On a alors $X^{n-1} \notin \mathcal{I}(l,u)$ et donc X^{n-1} qui n'est pas multiple de $G(l,u)$. Or, $G(l,u)$ est un diviseur unitaire de χ_l et est donc égal à $X^{r(l,u)}$. X^{n-1} n'en étant pas un multiple, $r(l,u) \geq n$. Comme on a l'inégalité inverse de manière générale, on en déduit que $r(l,u) = n$.

6.1. Une récurrence immédiate sur j montre que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ l^j(u) = \sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k^j w_k$$

On en déduit que

$$Pass(\mathcal{W}, \mathcal{B}(u)) = \begin{pmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \dots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{pmatrix}$$

Si deux λ_i sont égaux alors la matrice précédentes est non inversible (deux lignes égales) ce qui est exclus (c'est une matrice de passage et donc inversible). Les valeurs propres sont donc deux à deux distinctes.

6.2.

6.2.1 La nullité de AC se traduit par

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k = 0$$

c'est à dire que tous les λ_i sont racines de $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$.
P est alors nul (polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ ayant au moins n racines) et $\forall i,\ \alpha_i = 0$. On a donc l'endomorphisme canoniquement associé à A qui est injectif et, comme on est en dimension finie, bijectif. A est ainsi inversible.

6.2.2 Si on pose $u = w_1 + \dots + w_n$, A est la matrice de $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ dans la base $\mathcal{W}$ et son inversibilité montre que $(u, l(u), \dots, l^{n-1}(u))$ est une base de E. En particulier $r(l,u) \geq n$ et comme on a l'inégalité inverse en général, c'est que

$$r(l,u) = n$$