Problèmes Corrigés MP

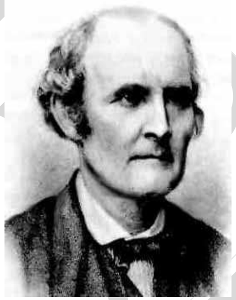
Devoir Surveillé

Algèbre Linéaire-Arithmétique

1 octobre 2012

Blague du jour

Un vieux milliardaire téléphone à une conseillère : J'ai 60 ans et je veux me marier avec une jeune fille de 20 ans. Pensez-vous que j'aie plus de chance de l'amener à m'épouser si je lui dis il y a quelques année, j'avais juste 50 ans ? La conseillère lui répond : A mon avis, vous feriez mieux de lui dire que quelques année, vous approchez des 80 ans !



Mathématicien du jour — Arthur Cayley (1821-1895)

Mathématicien et avocat britannique, l'un des fondateurs de l'école britannique moderne de mathématiques pures. Il est le premier à introduire la multiplication des matrices. Il a donné le premier, une définition qui s'approche de la notion moderne de groupe. Il a reçu la Médaille Copley en 1882. On lui doit aussi la découverte des nombres de Cayley, les octonions.

Problème I : Endomorphismes nilpotents de rang $n-1$, e3a 2007, PSI

Dans tout le problème, n est un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
$GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{C})$.
La matrice unité de cet espace sera noéte I_n et la matrice nulle O_n.
L'espace $E = \mathbb{C}^n$ est rapporté à une base $(e_j)_{1\leq j\leq n}$ et on rappelle que toute matrice carrée d'ordre n représente dans cette base un endomorphisme de E appelé endomorphisme associé.

Si v est un endomorphisme de E, on rappelle que :

- v^0 est l'endomorphisme unité,
- $\forall m \in \mathbb{N},\ v^{m+1} = v \circ v^m$.

L'endomorphisme v sera dit **nilpotent** s'il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $v^r = \theta$ (endomorphisme nul de E).
Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $J(\lambda)$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$J(\lambda) = (u_{i,j}) \text{ avec } \begin{cases} \forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ u_{i+1,i} = 1 \\ \forall i \in \{1,\dots,n\},\ u_{i,i} = \lambda \\ u_{i,j} = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Quelques propriétés de la matrice $J(0)$.

1. Déterminer le rang de $J(0)$.
2.
   2.1. Déterminer $J(0)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n-1$, puis pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq n$.

   2.2. Vérifier que toutes les puissances de $J(0)$ sont des matrices nilpotentes.
3. Déterminer $\alpha(J(0))$ puis $U = \alpha(J(0)) - I_n$.
4. Montrer que toute combinaison linéaire de deux matrices nilpotentes qui commutent est encore une matrice nilpotente.
5. Montrer que U est une matrice nilpotente de rang $n-1$.

Quelques résultats sur les noyaux itérés d'un endomorphisme.

Soit u un endomorphisme de E.

1. Prouver que $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j})$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de
$$r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$$
3. Montrer que :

   (i) $\forall m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$,

   (ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$,

   (iii) $\forall m \geq r,\ \ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

Recherche des endomorphismes nilpotents de rang $n-1$.

Soit V une matrice de $M_n(\mathbb{C})$, **de rang** $n-1$ et vérifiant $V^n = O_n$. On note v l'endomorphisme de E associé à V.

1. Soient p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

   1.1. Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

   1.2. Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

   1.3. Vérifier alors que l'on a
$$\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$$

   1.4. En déduire
$$\forall i \in \{1,\dots,n\},\ \dim(\ker(v^i)) \leq i$$

   1.5. Démontrer qu'en fait $\forall i \in \{1,\dots,n\}$, $\dim(\ker(v^i)) = i$.
2. Prouver alors que $v^{n-1} \neq \theta$.
3. En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que
$$B_1 = (e, v(e), v^2(e), \dots, v^{n-1}(e))$$
soit une base de E.
4. Ecrire la matrice de v dans cette base. Interpréter le résultat obtenu à l'aide des matrices $J(\lambda)$.
5. Déterminer alors tous les endomorphismes nilpotents de rang $n-1$ et montrer que les matrices de deux tels endomorphismes sont semblables.

Problème II : Indice de cyclicité, CCP 2010, TSI

Notations.

- Etant donné un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on note $\det(l)$ son déterminant, $\operatorname{tr}(l)$ sa trace et χ_l son polynôme caractéristique. En notant id l'endomorphisme identité, on définit $l^0 = id$ et, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $l^{k+1} = l \circ l^k$.

Objectifs.

Etant donné un vecteur non nul u et un endomorphisme l d'un espace vectoriel de dimension finie, on définit un entier $r(l,u)$ à partir des itérées du vecteur par l'endomorphisme. Le problème porte sur l'étude de propriétés de l'endomorphisme, liées à la valeur de l'entier $r(l,u)$. On fait établir des résultats généraux sur les endomorphismes étudiés.

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension n sur le corps $\mathbb{K}$ avec $n \geq 2$ et l est un endomorphisme de E.

II.1. Soit u un vecteur non nul de E.

1.1. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. Justifier qu'il existe un plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille de $k+1$ vecteurs $(u, l(u), \ldots, l^k(u))$ soit liée. On note $r(l,u)$ ce plus petit entier.

1.2. Justifier l'encadrement $1 \leq r(l,u) \leq n$.

1.3. Montrer que $r(l,u) = 1$ si et seulement si u est un vecteur propre de l. Montrer que $r(l,u) = n$ si et seulement si la famille $(u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E.

II.2. Un exemple.
Dans cette question, on suppose $n = 4$ et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
On considère l'endomorphisme f de E représenté par $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer $\det(f)$ et $\operatorname{tr}(f)$.
Montrer que la famile $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre. Déterminer trois réels x, y, z tels que $f^3(e_1) = xf^2(e_1) + yf(e_1) + ze_1$. En déduire $r(f, e_1)$.
On reprend le cas général où E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et l un endomorphisme de E. Soit u un vecteur non nul de E.

II.3. On suppose $n = r(l,u)$. D'après $II.1.3$, la famille $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$ est une base de E. On note $l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.

3.1. Déterminer la matrice $Mat_{\mathcal{B}(u)}(l)$ de l'endomorphisme l relativement à la base $\mathcal{B}(u)$. Calculer $\det(f)$ et $\operatorname{tr}(f)$

3.2. Déterminer $\chi_l(\lambda) = \det(l - \lambda id)$, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme l (on pourra calculer ce déterminant en ajoutant à la première ligne une combinaison linéaire des autres lignes, opération codée $L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda^{i-1} L_i$ où L_i est la ligne d'indice i).

II.4. On note $\mathcal{I}(l,u)$ l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que l'endomorphisme $P(l)$ vérifie $P(l)(u) = 0$.

4.1. Montrer que $\mathcal{I}(l,u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire, noté $G(l,u)$, tel que $\mathcal{I}(l,u)$ est formé de tous les polynômes produits du polynôme $G(l,u)$ par un polynôme quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

4.2. Justifier que le polynôme $G(l,u)$ divise le polynôme χ_l. Montrer que le polynôme $G(l,u)$ est de degré $r(l,u)$.

4.3. On reprend l'exemple de $II.2$. Déterminer le polynôme $G(f,e_1)$. En déduire le polynôme caractéristique de f puis les valeurs propres de f. Dans la question $II.2$, on montre que la famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre ; en utilisant ce résultat et le spectre de f, en déduire que l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

4.4. On suppose que l'endomorphisme l et le vecteur u vérifient les hypothèses de la question $II.3$: $r(l,u) = n$ et $l^n(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k l^k(u)$.
Déterminer le polynôme $G(l,u)$ et retrouver ainsi l'expression du polynôme caractéristique de l'endomorphisme l.

II.5. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $l^p = 0$.

5.1. Déterminer le polynôme caractéristique de l.

5.2. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
(1) Il existe un vecetur non nul u tel que $r(l,u) = n$
(2) $l^{n-1} \neq 0$

II.6. On suppose que l'endomorphisme l est diagonalisable. Soit $\mathcal{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ une base de vecteurs propres avec pour tout $k \in [1,n]$, $l(w_k) = \lambda_k w_k$.

6.1. On suppose qu'il existe un vecteur non nul u tel que $r(l,u) = n$ et on considère la base de E : $\mathcal{B}(u) = (u, l(u), \ldots, l^{n-1}(u))$. On note $u = \sum_{k=1}^{n} x_i w_i$. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{B}(u)$. En déduire que les valeurs propres de l sont toutes distinctes.

6.2. On suppose que les valeurs propres λ_i de l sont toutes distinctes.

6.2.1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et on note $C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne telle que $AC = 0$. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est nul. En déduire que A est inversible.

6.2.2 Montrer qu'il existe un vecteur u non nul tel que $r(l,u) = n$.

Fin

Bonne Chance