CPGE My Youssef, Rabat

بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
رَبِّي إِشرَح لِي صَدرِي وَ يَسِّر لِي أَمرِي وَ
أحلُل عُقدَةً مِن لِسَانِي يَفقَهُوا قَولِي

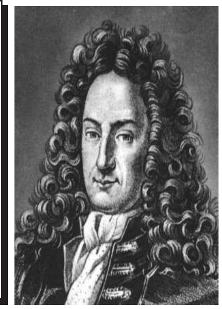
صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم
سورة طه

Contrôle 3 (09-10): *Calcul différentiel*

Samedi 5 Décembre 2009

Durée : 2 heures

Blague du jour
Une fonction constante et *exp* marchent tranquillement dans la rue. Sou dain la ils aperçoivent la différentielle qui approche. Se sentant menaçée, la fonction constante se sauve.
Dans un air moqueur et de défi, l'*exp* crie : Ah !Ah ! je m'inquiète pas, MOI, je suis une puissance, je suis e^x».
Dans quelques minute la différentielle revient avec juste sa force partielle et crie : «Salut, MOI, je suis $\dfrac{\partial}{\partial y}$.



Mathématicen du jour ***Leibniz.***
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) est un philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi allemand. Orphelin de père à 6 ans, il a quand même réussi une carrière florissante. Il est reconnu comme le plus grand intellectuel d'Europe, pensionné par plusieurs grandes cours, il était aussi correspondant des souverains et souveraines.
Comme philosophe, il s'est intéressé fort tôt à la scolastique et à la syllogistique. Il a conçu le projet d'une encyclopédie ou « bibliothèque universelle ». Comme mathématicien, il a fait entrer les sciences dans la nouvelle ère de l'analyse intégro-différentielle.

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante: 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Rédaction et présentation : **4 points.**

PROBLÉME 1 : **17 points.**

On pose :
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ **tel que** $x > 0, y > 0\}$ **et** f **est de classe** C^2 **sur** D**. On pose** $r = \sqrt{x^2+y^2}, t = \dfrac{y}{x}$ **et** $f(x,y) = g(r,t)$**. Et on pose enfin** $Tf(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$**, et pour tout** $a \in \mathbb{R}$ **:** $N_a = \{f \in \mathcal{C}^1(D)$ **tel que** $Tf - af = 0\}$**.**

1) ***(0.5 pt)*** **Montrer que** D **est un ouvert.**
2) ***(1 pt)*** **Préciser le domaine de définition de** g**, puis justifiez qu'elle est de classe** C^2**.**
3) ***(0.5 pt)*** **Si** $(f,h) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(D)$**, exprimer** $T(fh)$ **en fonction de** f, h, Tf **et** $Th.$
4) ***(1 pt)*** **Si** $(f,\varphi) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$**, donner l'expression de** $T(\varphi \circ f)$**.**
5) ***(1 pt)*** **Exprimer** Tf **en fonction de** $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial t}, r, t$**.**
6) ***(0.5 pt)*** **Calculer** Tt**.**
7) ***(1 pt)*** **Montrer que si** $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$ **alors** $\varphi \circ t \in N_0$**.**
8) ***(1,5 pt)*** **En déduire la forme générale des fonctions** $f \in N_0$**.**
9) ***(0,5 pt)*** **Calculer** Tr**.**
10) ***(1,5 pt)*** **Montrer que** $f \in N_0 \iff rf \in N_1$**, en déduire la forme générale des fonctions** $f \in N_1$**.**
11) ***(1,5 pt)*** **Pour** $a \in \mathbb{R}$**, calculer** $t(r^a)$**, en déduire la forme générale des fonctions** $f \in N_a$**.**
12) **On se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*)** $Tf - af = bh$ **où** $h \in N_b$**.**
    a) **On suppose d'abord que :** $a = b$
    (1,5 pt) **Montrer que (*) admet une solution particulière** f_0 **de la forme** $f_0 = \varphi(r)h$ **où** $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ **que l'on explicitera, en déduire la forme générale des solutions de (*).**
    b) **On suppose maintenant que :** $a \neq b$
    (1,5 pt) **Montrer que (*) admet une solution particulière** f_0 **de la forme** $f_0 = \lambda h$ **où** λ **est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).**
13) **Résoudre les équations suivants :**
    a) ***(1,5 pt)*** $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}.$
    b) ***(1,5 pt)*** $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) = \dfrac{\left(x^2+y^2\right)(x-y)}{x+y}.$

mamouni.myismail@gmail.com
myismail.chez.com

PROBLÉME 2 : ***Les lois de l'optique géométrique*** **9 points.**

Nous supposons que la lumière se déplace en minimisant le temps de parcours et que, de plus, dans un milieux homogène, sa vitesse est constante. Dans un tel milieu, ses trajectoires sont donc des segments de droite. La question est de savoir comment est modifiée sa trajectoire lorsqu'elle traverse la surface séparant deux milieux dans lesquels elle circule à des vitesses différentes (lois de la réfraction) ou lorsqu'elle se réfléchit en un point de (lois de la réflexion). Dans le premier cas, un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle S placée dans le premier milieu traverse une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ en un point M et poursuit sa trajectoire jusqu'en un point cible C du second. Dans le second, M est le point en lequel le rayon se réfléchit vers la cible et celle-ci est dans le même milieu que la source. Nous supposons que Σ est définie par une équation cartésienne de la forme $f(x, y, z) = 0$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. Soit v_1 la vitesse de la lumière avant l'incidence et v_2 après, on a en particulier $v_1 = v_2$ en cas de réflexion.

1) ***(1 pt)*** **Montrer que la fonction $g : M \mapsto \|\overrightarrow{SM}\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$ et donner $\overrightarrow{\mathbf{grad}}g(M)$ pour tout $M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$**

2) **Soit $t : M \mapsto t(M)$, la fonction qui calcule le temps de parcours du point source S au point cible C, en passant par un point $M \in \Sigma$.**
 (1.5 pt) **Montrer que :**
$$t(M) = \frac{\|\overrightarrow{S}M\|}{v_1} + \frac{\|\overrightarrow{C}M\|}{v_2}.$$

3) ***(0.5 pt)*** **En déduire $\overrightarrow{\mathbf{grad}}t(M)$.**

4) ***(1 pt)*** **Rappeler le principe des extremas liés et multiplicateurs de Lagrange.**

5) **Soit $A \in \Sigma$ où le temps de parcours du point source S au point cible C, passant par A est minimal.**
 (1 pt) **Montrer que**
$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{\overrightarrow{SA}}{\|\overrightarrow{SA}\| \cdot v_1} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{grad}} f(A)$$

6) ***(0.5 pt)*** **Que représente $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A)$ pour Σ.**

7) ***(1 pt)*** **En déduire la 1ère loi de l'optique géométrique :**
 Le rayon incident $\overrightarrow{SA}$, le rayon réfracté (ou réfléchi), $\overrightarrow{CA}$ et la normale au point d'incidence à la surface de séparation Σ sont dans un même plan.

8) ***(2 pts)*** **Ce plan coupe le plan tangent à la surface Σ selon une droite Δ. En projetant scalairement l'égalité précédente sur le vecteur unité normé $\overrightarrow{u}$ de celle-ci orienté dans le sens de déplacement de la lumière, en déduire la seconde loi :**
$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{v_2}{v_1}$$
 où i désigne l'angle d'incidence et r celui de réflexion ou de réfraction (faire un dessin)

9) ***(0.5 pt)*** **Que peut-on dire à propos des angles d'incidence et de réflexion.**

Fin
Bonne chance