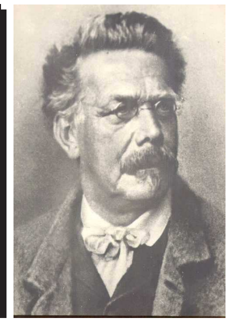
CPGE My Youssef, Rabat

Corrigé Contrôle 3 (09-10): *Calcul différentiel*

Samedi 5 Décembre 2009

Durée : 2 heures

• ***Blague du jour :***
Pourquoi ne faut-il pas lancer un défi (lisez $d\varphi$) à un mathématicien ?
Réponse : Parce qu'il l'intègre et en fait un φ !
• ***Mathématicen du jour : Hess.***
Ludwig Otto Hesse (1811-1874) est un mathématicien russo-allemand. Il a travaillé sur les invariants algébriques. Il a donné son nom à la Courbe de Hesse, à la Matrice hessienne $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ et à la forme normale de Hesse.



PROBLÉME 1 :

.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_1(x,y) > 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_2(x,y) > 0\}$ est un ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts, car les fonctions $f_1(x,y) \longmapsto x$ et $f_2(x,y) \longmapsto y$ sont continues.

2) La linéarité de l'application $T : f \longrightarrow T(f)$ découle de celle des dérivées partielles.

3) $T(fh) = fT(h) + hT(f)$ car $\dfrac{\partial(fh)}{\partial x} = f\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(fh)}{\partial y} = f\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4) $T(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)T(f)$ car $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

5) D'aprés les formules du cours : $\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{array}\right.$, on en déduit que $\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial 1}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{array}\right.$

d'où $T(f) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

6) $Tt = 0$, simple calcul.

7) $T(\varphi \circ t) = (\varphi' \circ)Tt = 0$, donc $\varphi \circ \in N_0$.

8) D'aprés ce qui précède, si $f = \varphi \circ t$, alors $f \in N_0$. Inversement soit $f \in N_0$, alors $T(f) = r\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$, donc $g(r,t) = \varphi(t)$, d'où $f(x,y) = g(r,t) = \varphi(t) = \varphi \circ t(x,y)$. Donc $\varphi \circ t$ est la forme générale des éléments de N_0.

9) $Tr = r$, simple calcul.

.

10) $rf \in N_1 \Longleftrightarrow T(rf) = rf \Longleftrightarrow rT(f) + fT(r) = rf \Longleftrightarrow T(f) = 0$ car $Tr = r$, ainsi $f \in N_1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{r}f \in \mathbb{N}_0 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{r}f = \varphi \circ t \Longleftrightarrow f = r\varphi \circ t$, c'est la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $T(r^a) = T\left((x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}\right) = ar^a$, de la même façon que précédement, on a $T(r^a f) = r^a T(f) + ar^a f$, donc $r^a f \in N_a \Longleftrightarrow f \in N_0$ et on en déduit que la forme générale des fonctions $f \in N_a$ est $f = r^a \varphi \circ t$.

12) (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$, donc $Th = bh$.

a) Supposons $a = b$, soit $f_0 = \varphi(r)h$ une solution particulière f_0 où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$, donc $Tf_0 = T((\varphi \circ r)h) = (\varphi \circ r)Th + hT(\varphi \circ r) = (\varphi \circ r)bh + h(\varphi' \circ r)Tr = bf + rh(\varphi' \circ r)$, ainsi $Tf_0 - af_0 = bh$ devient $(b-a)f_0 + rh(\varphi' \circ r) = h$, d'où $r\varphi'(r) = 1$, c'est une équation différentielle du 1èr ordre de solution $\varphi(r) = \ln r$. Soit f une solution générale de (*), comme l'est f_0 aussi, alors $T(f - f_0) - a(f - f_0) = 0$, d'où $f - f_0 \in N_a$, donc $f - f_0 = r^a \varphi \circ t$, d'où $f = f_0 + r^a \varphi \circ t = \ln r + r^a \varphi \circ t$ c'est la forme générale des solutions de (*) quand$a = b$

b) On suppose maintenant que : $a \neq b$. Soit $f_0 = \lambda h$ alors $Tf_0 = \lambda Th = \lambda bh$, $Tf_0 - af_0 = h$ donne $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$. De façon pareille toute solution f de (*) s'écrit sous la forme $f = f_0 + r^a \varphi \circ t = \dfrac{1}{b-a}h + r^a \varphi \circ t$, c'est la forme générale des solutions de (*) quand $a \neq b$.

13) a) Pour cette équation $a = 1$, $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2-xy}$. Les calculs montrent que $Th = 0$, d'où $b = 0$, donc $a \neq b$, d'où $f(x,y) = -h(x,y) + \sqrt{x^2+y^2}\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Ici $a = 2, h(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$. Les calculs montrent que $Th = 2h$, d'où $a = b = 2$, donc $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

PROBLÉME 2 : ***Les lois de l'optique géométrique***

1) **Posons $S = (a,b,c)$, on a $g : M = (x,y,z) \mapsto \|\overrightarrow{SM}\| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$ comme composé des fonctions**
$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \setminus \{S\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 \end{array}$ **et** $\psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$ **qui sont de classe $\mathcal{C}^1$,**
avec $\overrightarrow{\mathbf{grad}}g(M) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(M)\overrightarrow{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)\overrightarrow{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}(M)\overrightarrow{k} = \dfrac{(x-a)\overrightarrow{i}+(y-b)\overrightarrow{j}+(z-c)\overrightarrow{k}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}} = \dfrac{\overrightarrow{SM}}{\|\overrightarrow{SM}\|}$
pour tout $M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$.

2) **Soit t_1, le temps de parcours du point source S au point M et t_2 celui du point M au point cible C, on a $t(M) = t_1 + t_2$. Or le mouvement du point S au point M est un mouvement unifome, à vitesse constante égale à v_1, d'où $\|\overrightarrow{SM}\| = tv_1$, donc $t_1 = \dfrac{\|\overrightarrow{SM}\|}{v_1}$. De même $t_2 = \dfrac{\|\overrightarrow{CM}\|}{v_2}$, d'où $t(M) = \dfrac{\|\overrightarrow{SM}\|}{v_1} + \dfrac{\|\overrightarrow{CM}\|}{v_2}$.**

3) **D'après les deux questions précedentes, on en déduit que :**

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}t(M) = \frac{\overrightarrow{SM}}{v_1 \cdot \|\overrightarrow{SM}\|} + \frac{\overrightarrow{CM}}{v_2 \cdot \|\overrightarrow{CM}\|}$$

4) **Si U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ où $1 \leq i \leq m$ et $V = \{M \in U$ tel que $f_i(M) = 0,\ \forall 1 \leq i \leq m\}$ tel que $f|_V$ admet un extremum en un point $A \in V$, alors**

$$\exists (\lambda_i)_{1\leq i \leq m} \text{ tel que } \overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\mathbf{grad}}f_i(A)$$

Les coéfficients $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ s'appellent multiplicateurs de Lagrange.

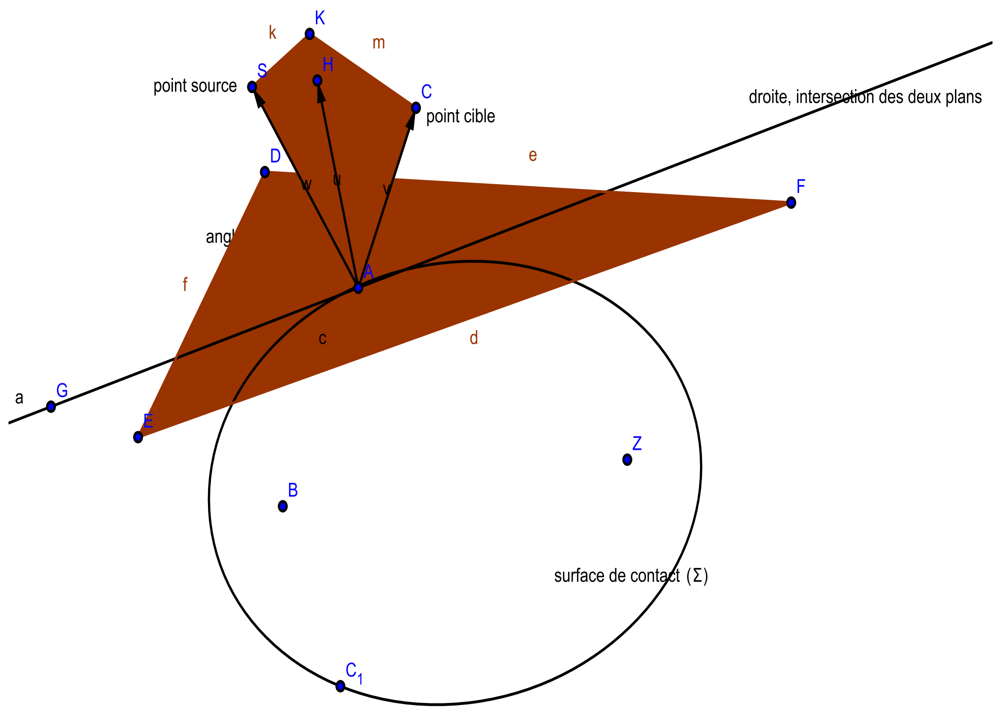
5) **le point $A \in \Sigma$ est celui où la fonction $t : M \mapsto t(M)$ atteint son minimum sur la surface Σ d'équation $f(M) = 0$, d'après le principe des exremas liées de Lagrange, on en déduit que :**

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{\mathbf{grad}}t(A) = \frac{\overrightarrow{SA}}{\|\overrightarrow{SA}\| \cdot v_1} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A)$$

6) **Résultat du cours, comme application du théorème des fonctions implicites : $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A)$ dirige la normale du plan tangent à Σ au point A, car Σ a pour équation $f(M) = 0$.**

7) **D'après la question les trois vecteurs $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A)$ forment une famille liée de l'espace, donc sont dans un même plan.**

8) **Soit $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{AI}$ un vecteur directeur unitaire de la droite Δ, intersection de deux plans (voir dessin ci-dessous), on a $\overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A) \perp \overrightarrow{z} = 0$, $\widehat{\overrightarrow{SA},\overrightarrow{z}} = \dfrac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{\overrightarrow{SA},\overrightarrow{z}} = \dfrac{\pi}{2} - r$ (angles non orientés), d'où $f(A) \cdot \overrightarrow{z} = 0$, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{z} = \pm \|\overrightarrow{SA}\| \sin i$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{z} = \pm \|\overrightarrow{CA}\| \sin r$. En passant au produit scalaire par $\overrightarrow{z}$ dans la relation $\dfrac{\overrightarrow{SA}}{\|\overrightarrow{SA}\| \cdot v_1} + \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\mathbf{grad}}f(A)$, puis après à la valeur absolue, on obtient la 2ème loi : $\dfrac{\sin r}{\sin i} = \dfrac{v_2}{v_1}$.**



9) **Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux car dans le cas de la réflexion, le rayon est toujours dans le même milieu, donc $v_1 = v_2$.**

Fin
à la prochaine