Mamouni My Ismail

Devoir libre N°11

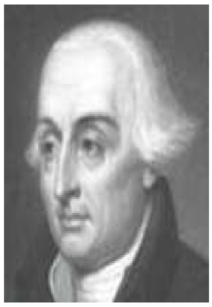
Extrema liés
Multiplicateurs de Lagrange

MP-CPGE Rabat

Vendredi 10 Décembre 2010

Blague du jour

Lors d'un discours prononcé devant une assemble de professeurs de mathématiques, George W.Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrémistes.
Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide des radicaux. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...



Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813)

Mathématicien du jour

En italien Giuseppe Lodovico Lagrangia , est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. N en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père.
Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'école normale et à l'école polytechnique.

1 Principe

1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soient $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $V = \{x \in U$ tel que $f_i(x) = 0,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}$. Montrer le résultat suivant :
Si $f|_V$ admet un extremum local en un point $a \in V$, alors

$$\exists (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m} \text{ tel que } \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f_i(a)$$

Les coefficients $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ s'appellent multiplicateurs de Lagrange.

2 Distance d'un point une sous-espace affine.

2. Soient $\mathcal{E}$ un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ de dimension p et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a \in \mathcal{E}$, on se propose de donner une formule pour calculer

$$d(a, \mathcal{E}) = \min_{x\in\mathcal{E}} d(a, x)$$

3 Montrer que la distance de a à $\mathcal{E}$ est réalisée en un seul point, $x_a = p_{\mathcal{E}}(a)$, la projection orthogonale de a sur $\mathcal{E}$, i.e.

$$d(a, \mathcal{E}) = d(a, x_a)$$

4 Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{rg}(A) = n - p$ et $\exists b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E}$ soit d'équation $Ax + b = 0$, i.e., $x \in \mathcal{E}$ si et seulement si $Ax + b = 0$.

5 Montrer que $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\left(A^t A\right)$, puis en déduire que $A^t A$ est inversible.

6 Montrer que $x_a = a - ({}^tA).\left(A^tA\right)^{-1}(Aa + b)$, en déduire que $d(a, \mathcal{E}) = \left\|({}^tA).\left(A^tA\right)^{-1}(Aa + b)\right\|$

7 Soit $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & d(a,x)^2 \end{array}$, calculer $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x)$, puis en déduire que $\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-p}$ tel que $x_a - a = \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x_a) = ({}^tA).\lambda$

8 Montrer ensuite que $\lambda = -\left(A^tA\right)^{-1}(Aa + b)$.

9 Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ d'équation $\mathcal{H} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ et $M = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}$, montrer que

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

3 Le quotient de Rayleigh.

1 Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré d si elle vérifie la relation suivante :

$$f(\lambda x) = \lambda^d(f(x)), \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que si f est homogène de degré d et bornée sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$, alors
$\exists \alpha \geqslant 0$ tel que $|f(x)| \leqslant \alpha \|x\|^d$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on pose

$$R(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{Quotient de Rayleigh.}$$

Montrer que que la fonction $f : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est homogène.
Montrer que la fonction $x \mapsto R(x)$ admet un minimum et maximum globaux.

3 Montrer que $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est un extremum pour la fonction $x \mapsto R(x)$ si et seulement si $\dfrac{a}{\|a\|}$ est un extremum pour la fonction $x \mapsto f(x)$.

4 Soit $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ extremum pour f, montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Aa = \lambda a$
Indication : Penser à utiliser le principe des extremas liés de Lagrange pour la fonction f avec la contrainte $f_1 : x \mapsto \|x\|^2 - 1$.

5 En déduire que $\min\limits_{x \neq 0} \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \min\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$, $\max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{sp}(A)} |\lambda|$

4 Les lois de l'optique géométrique

Nous supposons que la lumière se déplace en minimisant le temps de parcours et que, de plus, dans un milieux homogène, sa vitesse est constante. Dans un tel milieu, ses trajectoires sont donc des segments de droite. La question est de savoir comment est modifie sa trajectoire lorsqu'elle traverse la surface séparant deux milieux dans lesquels elle circule des vitesses différentes (lois de la réfraction) ou lorsqu'elle se réfléchit en un point de (lois de la réflexion). Dans le premier cas, un rayon lumineux issu d'une source ponctuelle S place dans le premier milieu traverse une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ en un point M et poursuit sa trajectoire jusqu'en un point cible C du second. Dans le second, M est le point en lequel le rayon se réfléchit vers la cible et celle-ci est dans le même milieu que la source. Nous supposons que Σ est définie par une équation cartésienne de la forme $f(x, y, z) = 0$, o f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition. Soit v_1 la vitesse de la lumière avant l'incidence et v_2 après, on a en particulier $v_1 = v_2$ en cas de réflexion.

1 Montrer que la fonction $g : M \mapsto \left\|\overrightarrow{SM}\right\|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$ et donner $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M)$ pour tout $M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$

2 Soit $t : M \mapsto t(M)$, la fonction qui calcule le temps de parcours du point source S au point cible C, en passant par un point $M \in \Sigma$. Montrer que : $t(M) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}{v_1} + \dfrac{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}{v_2}$.

3 En déduire $\overrightarrow{\text{grad}}\, t(M)$.

4 Rappeler le principe des extremas liés et multiplicateurs de Lagrange.

5 Soit $A \in \Sigma$ où le temps de parcours du point source S au point cible C, passant par A est minimal. Montrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot v_1} + \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot v_2} = \lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)$

6 Que représente $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(A)$ pour Σ.

7 En déduire la 1ère loi de l'optique géométrique :
Le rayon incident $\overrightarrow{SA}$, le rayon réfracté (ou réfléchi), $\overrightarrow{CA}$ et la normale au point d'incidence la surface de séparation Σ sont dans un même plan.

8 Ce plan coupe le plan tangent à la surface Σ selon une droite Δ. En projetant scalairement l'égalité précédente sur le vecteur unité normé $\overrightarrow{u}$ de celle-ci orienté dans le sens de déplacement de la lumière, en déduire la seconde loi :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{v_2}{v_1}$$

où i désigne l'angle d'incidence et r celui de réflexion ou de réfraction (faire un dessin)

9 Que peut-on dire à propos des angles d'incidence et de réflexion.

FIN

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre N°11 (Pr Mamouni)

Extrema liés
Multiplicateurs de Lagrange

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Pourquoi ne faut-il pas lancer un défi (lisez $d\varphi$) un mathématicien ?

\- Réponse : Parce qu'il l'intègre et en fait un φ !

- Qu'est ce que crie un escargot sur le dos d'une tortue ?

\- Réponse : Yaaaaaaaaaaahooooooooooooooooooooooooouuuuuuuuuuuuuu !!!!

- Que dit un hérisson qui se cogne à un cactus ?

\- Réponse : maman !

Ludwig Otto Hesse (1811-1874)

Mathématicien russo-allemand. Il a travaillé sur les invariants algébriques. Il a donné son nom à la Courbe de Hesse, à la Matrice hessienne $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et à la forme normale de Hesse. Parmi ses professeurs, on citera Jacobi et Bessel. Les travaux les plus célèbres de Hesse portaient sur la théorie des fonctions algébriques et sur celle des invariants.

Mathématicien du jour

Les lois de l'optique géométrique

1 Posons $S = (a, b, c)$, on a $g : M = (x, y, z) \mapsto \left\|\overrightarrow{SM}\right\| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$ comme composé des fonctions

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 \setminus \{S\} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ t & \longmapsto & \sqrt{t} \end{array}$$

qui sont de classe $\mathcal{C}^1$, avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, g(M) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(M)\,\vec{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}(M)\,\vec{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}(M)\,\vec{k} = \dfrac{(x-a)\,\vec{i} + (y-b)\,\vec{j} + (z-c)\,\vec{k}}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \dfrac{\overrightarrow{SM}}{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}$ pour tout $M \in \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$.

2 Soit t_1, le temps de parcours du point source S au point M et t_2 celui du point M au point cible C, on a $t(M) = t_1 + t_2$. Or le mouvement du point S au point M est un mouvement uniforme, à vitesse constante égale v_1, d'où $\left\|\overrightarrow{SM}\right\| = t v_1$, donc $t_1 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}{v_1}$. De même $t_2 = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}{v_2}$, d'où $t(M) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{SM}\right\|}{v_1} + \dfrac{\left\|\overrightarrow{CM}\right\|}{v_2}$.

3 D'après les deux questions précédentes, on en déduit que : $\overrightarrow{\text{grad}}\, t(M) = \dfrac{\overrightarrow{SM}}{v_1 \cdot \left\|\overrightarrow{SM}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{CM}}{v_2 \cdot \left\|\overrightarrow{CM}\right\|}$

4 Si U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ où $1 \leqslant i \leqslant m$ et $V = \{M \in U \text{ tel que } f_i(M) = 0,\ \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}$ tel que $f|_V$ admet un extremum en un point $A \in V$, alors

$\exists(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}}f(A) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\text{grad}}f_i(A)$. Les coefficients $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ s'appellent multiplicateurs de Lagrange.

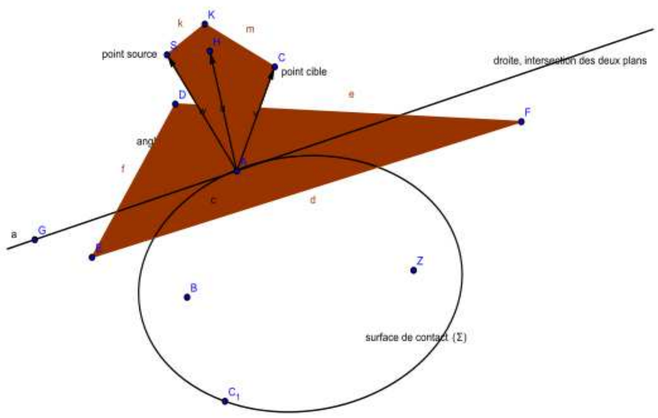
5 le point $A \in \Sigma$ est celui où la fonction $t : M \mapsto t(M)$ atteint son minimum sur la surface Σ d'équation $f(M) = 0$, d'après le principe des exremas liés de Lagrange, on en déduit que :

$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{\text{grad}}t(A) = \frac{\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot v_1} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot v_2} = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$$

6 Résultat du cours, comme application du théorème des fonctions implicites : $\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$ dirige la normale du plan tangent Σ au point A, car Σ a pour équation $f(M) = 0$.

7 D'après la question les trois vecteurs $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{SA}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$ forment une famille lie de l'espace, donc sont dans un même plan.

8 Soit $\vec{z} = \overrightarrow{AI}$ un vecteur directeur unitaire de la droite Δ, intersection de deux plans (voir dessin ci-dessous), on a $\overrightarrow{\text{grad}}f(A) \perp \vec{z} = 0$, $\widehat{\overrightarrow{SA}, \vec{z}} = \frac{\pi}{2} - i$ et $\widehat{\overrightarrow{SA}, \vec{z}} = \frac{\pi}{2} - r$ (angles non orientés), d'o $f(A) \cdot \vec{z} = 0$, $\overrightarrow{SA} \cdot \vec{z} = \pm\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \sin i$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \vec{z} = \pm\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \sin r$. En passant au produit scalaire par $\vec{z}$ dans la relation $\frac{\overrightarrow{SA}}{\left\|\overrightarrow{SA}\right\| \cdot v_1} + \frac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot v_2} = \lambda\overrightarrow{\text{grad}}f(A)$, puis aprs la valeur absolue, on obtient la 2me loi : $\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{v_2}{v_1}$.



9 Les angles d'incidence et de réflexion sont égaux car dans le cas de la réflexion, le rayon est toujours dans le même milieu, donc $v_1 = v_2$.

À la prochaine