DL 12 Fonctions harmoniques

Blague du jour

Pour une question bien précise :
- Un ingénieur pense que ses équations sont une approximations de la réalité.
- Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.
- Un mathématicien s'en moque.

John Machin (1680 - 1751)

Mathématicien anglais, connu principalement pour avoir calculé en 1706, les 100 décimales de π grâce à la formule qui porte son nom : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan 1239$. Malgré un nom de famille très drôle, John Machin a enseigné les mathématiques à Brook Taylor. Il était aussi professeur d'astronomie, secrétaire de la Royal Society et membre de la commission qui décida de la priorité de Calcul entre Leibniz et Newton en 1712.

Mathématicien du jour

Énoncé : Mines-Ponts 2004, MP

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable ; le laplacien de la fonction f est, par définition, la fonction, notée Δf, définie dans l'ouvert U par la relation suivante :

$$\Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y)\,.$$

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes, définie dans un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$, deux fois continûment dérivable, est harmonique dans U si et seulement si son laplacien est nul dans U :

$$\Delta f\,(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,(x,y) = 0.$$

Exemple : en électrostatique, le potentiel électrique dans le vide est harmonique.

Le but du problème est de donner des exemples de telles fonctions puis de démontrer certaines propriétés de ces fonctions : le principe du maximum, la propriété de moyenne, le fait que les fonctions bornées harmoniques dans tout le plan sont constantes.

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne.

Quelques exemples de fonctions harmoniques :

1. Démontrer que les fonctions complexes f et g_n, $n \in \mathbb{N}$, définies dans le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations ci-dessous, sont harmoniques :

$$f(x,y) = e^{x\ +\ i\ y}, \quad g_n(x,y) = (x + i\ y)^n.$$

2. Déterminer les fonctions u réelles, de classe C^2, définies sur la demi-droite ouverte $]0,\ \infty[$, telles que chaque fonction h, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé du point O $\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}\right)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique

$$h(x,y) = u\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Poser si nécessaire : $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

3. Déterminer les fonctions v réelles, de classe C^2, définies sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telles que chaque fonction k, définie dans le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe $y'Oy$ $\left(\mathbb{R}^2 \setminus y'Oy\right)$ par la relation ci-dessous, soit harmonique.

$$k(x,y) = v\left(\frac{y}{x}\right).$$

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies dans tout le plan $\mathbb{R}^2$ par les relations suivantes :

$$u_n(x,y) = (-1)^n \frac{(x+iy)^n}{(2n)!}.$$

4. Soit K un ensemble fermé borné quelconque du plan $\mathbb{R}^2$; démontrer que la restriction $u_{n|K}$ de la fonction u_n au fermé K est le terme général d'une série de fonctions uniformément convergente.

En déduire que la série de fonctions de terme général u_n converge en tout point du plan et que sa somme, la fonction φ, définie par la relation suivante

$$\varphi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y),$$

est continue dans le plan.

5. Démontrer que cette fonction φ est harmonique dans tout le plan $\mathbb{R}^2$.

Principe du maximum :

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon strictement positif r $(r > 0)$; soit C le cercle de centre O et de rayon r :

$$\begin{aligned} D &= \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\right\}, \\ C &= \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\right\}. \end{aligned}$$

Étant donné un entier strictement positif p $(p > 0)$, soit f_p la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par la relation suivante :

$$f_p(x, y) = f(x, y) + \frac{x^2 + y^2}{p}.$$

6. Démontrer l'existence d'un point M_p de coordonnées a_p et b_p, appartenant au disque fermé D en lequel la fonction f_p atteint son maximum :

$$f_p(a_p, b_p) = \max_{(x,y)\in D} f_p(x, y).$$

7. Démontrer que, si le point M_p appartient à l'intérieur du disque D, les deux dérivées secondes de la fonction f_p, obtenues en dérivant deux fois par rapport à x ou deux fois par rapport à y, sont, en ce point M_p, négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0 \ ; \ \frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0.$$

8. En déduire, en calculant par exemple le laplacien de la fonction f_p, que le point M_p est situé sur le cercle C.

9. Démontrer qu'il existe un point P de coordonnées a et b du cercle C en lequel la fonction f atteint son maximum sur D :

$$f(a, b) = \max_{(x,y)\in D} f(x, y).$$

10. En déduire que deux fonctions harmoniques dans le plan $\mathbb{R}^2$ égales le long d'un cercle C du plan (de rayon strictement positif), sont égales dans tout le disque D de frontière C.

Propriété de la moyenne

Soit f une fonction réelle harmonique définie dans le plan $\mathbb{R}^2$. Étant donnés un point M_0 de coordonnées x_0 et y_0 et un réel ρ positif ou nul, soit F la fonction définie sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$ par la relation suivante :

$$F(\rho) = \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\ \cos\theta,\ y_0 + \rho\ \sin\theta)\, d\theta.$$

11. Démontrer que la fonction F est définie et continue sur la demi-droite fermée $[0, \infty[$.

12. Démontrer que la fonction F est continûment dérivable. Préciser sa dérivée $F'(\rho)$.

13. Démontrer que le produit $\rho.F'(\rho)$ est égal à la valeur d'une intégrale curviligne d'une forme différentielle $\alpha = A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy$ le long d'un arc orienté Γ :

$$\rho.F'(\rho) = \int_\Gamma (A(x,y)\ dx + B(x,y)\ dy).$$

Préciser la forme différentielle α et l'arc orienté Γ.

14. Démontrer que la fonction F est une fonction constante ; préciser sa valeur.

15. Soit D le disque fermé de centre le point M_0 de coordonnées (x_0, y_0) et de rayon r $(r > 0)$; démontrer que l'intégrale double I de la fonction f étendue au disque D se calcule simplement en fonction de $f(x_0, y_0)$ suivant la relation :

$$I = \iint_D f(x,y)\ dx\ dy = \pi\ r^2\ f(x_0, y_0).$$

Fonctions harmoniques bornées dans le plan :

Soit f une fonction définie dans tout le plan, réelle, harmonique et bornée : il existe donc une constante C telle qu'en tout point (x,y) du plan :

$$|f(x,y)| \leq C.$$

16. Soient deux disques fermés D_1 et D_2 de centres, distincts l'un de l'autre, O et M_0, de coordonnées respectives $(0,0)$ et (x_0, y_0). Soit r le rayon commun de ces disques. La distance d des centres O et M_0 (égale à $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$) est supposée strictement inférieure au rayon r $(0 < d < r)$. Soit L_2 l'ensemble des points du disque D_2 qui ne sont pas dans le disque D_1.

En considérant par exemple un disque contenu dans l'intersection des disques D_1 et D_2, démontrer que l'aire de L_2 est majorée par l'expression $\pi\ r\ d$.

17. À l'aide par exemple de la question 15, donner un majorant de la valeur absolue de la différence $f(x_0, y_0) - f(0,0)$ au moyen de la constante C, du rayon r et de d.
En déduire que la fonction f est constante.

Fin

Á la prochaine