Corrigé : Pr. Patte, CPGE France

① **a** Fonction exponentielle : La fonction $f : (x,y) \to \exp x\ (\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ est de sur le plan $\mathbb{R}^2$. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{i}^2 f$. Donc $\Delta f = 0$, i.e. f est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

b Fonctions puissances : La fonction g_n est de sur $\mathbb{R}^2$. Si $n \leq 1$, alors $\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} = 0$. Sinon, $\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial x^2} = n(n-1)g_{n-2}$ et $\dfrac{\partial^2 g_n}{\partial y^2} = \mathrm{i}^2 n(n-1)g_{n-2}$. Dans tous les cas, $\Delta g_n = 0$, i.e. g_n est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

② Fonctions radiales : Si u est de sur $]0,+\infty[$, alors $h : (x,y) \to u(\sqrt{x^2+y^2})$ est de sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. En posant $r = \sqrt{x^2+y^2}$, on a $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{r}u'(r)$, puis $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{r}u'(r) - \dfrac{x^2}{r^3} + \dfrac{x^2}{r^2}u''(r)$, enfin par symétrie, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{r}u'(r)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{1}{r}u'(r) - \dfrac{y^2}{r^3} + \dfrac{y^2}{r^2}u''(r)$. Donc $\Delta h(x,y) = \dfrac{1}{r}u'(r) + u''(r)$.

Alors h est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \iff u'$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $z' + \dfrac{1}{r}z = 0$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u' : r \to \dfrac{k}{r}$, i.e. si et seulement s'il existe $k, c \in \mathbb{R}$ tels que $u : r \to k\ln r + c$.

③ Si v est de sur $\mathbb{R}$, alors $k : (x,y) \to v(\frac{y}{x})$ est de sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus y'Oy$. En posant $t = \dfrac{y}{x}$, on a $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}v(t)$, $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) = 2\dfrac{y}{x^3}v'(t) + \dfrac{y^2}{x^4}v''(t)$, $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{x}v'(t)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{1}{x^2}v''(t)$. Donc $\Delta k(x,y) = \dfrac{1}{x^2}[2tv'(t) + (t^2+1)v''(t)$.

Alors la fonction k est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \iff \forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1)v''(t) + 2tv'(t) = 0$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, (t^2+1)v'(t) = k$, i.e. si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, v'(t) = \dfrac{k}{t^2+1}$, i.e. si et seulement s'il existe $k, c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = k\arctan t + c$.

④ Soit K un fermé borné du plan, i.e. un compact du plan. Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in K, |x+iy| \leq C$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x,y) \in K, |u_n(x,y)| \leq \dfrac{C^n}{(2n)!} \leq \dfrac{C^n}{n!} = \alpha_n$. Comme la série $\sum \alpha_n$ est une série convergente indépendante de (x,y), la série $\sum u_n$ converge normalement, donc converge uniformément sur K.

On en déduit la convergence simple sur le plan. De plus comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction u_n est continue sur le plan, la convergence uniforme sur tout compact du plan prouve la continuité de la somme $\varphi = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) n = 0\infty u_n$ sur le plan.

⑤ On va montrer que φ admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 continues sur le plan.

Existence des dérivées partielles : on fixe $y \in \mathbb{R}$ et on étudie la série de fonctions $\sum u_{y,n}$ où $u_{y,n} : x \to u_n(x,y)$.

① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $u_{y,n}$ est de sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'_{y,n}(x) = (-1)^n n \dfrac{(x+\mathrm{i}y)^{n-1}}{(2n)!}$ et $u''_{y,n}(x) = (-1)^n n(n-1)\dfrac{(x+\mathrm{i}y)^{n-2}}{(2n)!}$.

② Les séries $\sum u_{y,n}$, $\sum u'_{y,n}$ et $\sum u''_{y,n}$ convergent simplement et même absolument sur $\mathbb{R}$: $\left|u'_{y,n}(x)\right| = n\dfrac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-1}}{(2n)!} \leq \dfrac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-1}}{(n-1)!}$ et $\left|u''_{y,n}(x)\right| = n(n-1)\dfrac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-2}}{(2n)!} \leq \dfrac{(\sqrt{x^2+y^2})^{n-2}}{(n-2)!}$.

③ La série $\sum u''_{y,n}$ converge uniformément sur tout segment $[-a,a] \subset \mathbb{R}$: $\forall n \geq 2, \forall x \in [-a,a], \left|u''_{y,n}(x)\right| \leq \dfrac{(\sqrt{a^2+y^2})^{n-2}}{(n-2)!}$ et la série $\sum \dfrac{(\sqrt{a^2+y^2})^{n-2}}{(n-2)!}$ est indépendante de x et converge.

On déduit du théorème de dérivation terme à terme que la somme de la série $\sum u_{y,n}$, i.e. la fonction $\varphi_y : x \to \varphi(x,y)$ est de sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'_y(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) n = 0\infty u'_{y,n}(x)$ et $\varphi''_y(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) n = 0\infty u''_{y,n}(x)$.

Finalement $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ existent sur $\mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) n = 0\infty \dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) n = 0\infty \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$.

On obtient de même l'existence et la valeur de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$ et, de manière presque identique, de $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}$.

On remarque que $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = \mathrm{i}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Continuité des dérivées partielles secondes : il suffit de la prouver pour $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$. On procéde comme à la question 4. Avec les notations de la question 4 : $\forall n \geq 2, \forall (x,y) \in K, \left|\dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq n(n-1)\dfrac{C^{n-2}}{(2n)!} \leq \dfrac{C^{n-2}}{(n-2)!} = \beta_n$ et $\sum \beta_n$ est une série convergente. La série $\sum \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ converge uniformément sur K. La convergence uniforme de la série $\sum \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ sur tout compact du plan et la continuité de son terme général sur le plan assure la continuité de $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Finalement φ est de sur le plan.

L'égalité $\Delta\varphi = 0$ a déjà été vérifiée. La fonction φ est donc harmonique sur le plan.

Principe du maximum :

⑥ D est un fermé borné du plan donc un compact du plan et f_p est continue. Donc f_p admet un maximum sur D, en un point $M_p = (a_p, b_p)$.

⑦ Si M_p est à l'intérieur de D : en notant $g : \mathbb{R} \ni x \to f_p(x, b_p)$, g admet un maximum local en a_p ; or g est de ; donc $g'(a_p) = 0$ et, au voisinage de a_p, $g(x) = g(a_p) + \frac{1}{2}(x-a_p)^2 g''(a_p) + o((x-a_p)^2)$; donc $g''(a_p) \leq 0$. Comme $g''(x) = \frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(x, b_p)$, on obtient $\frac{\partial^2 f_p}{\partial x^2}(a_p, b_p) \leq 0$.

On obtient, en intervertissant les variables, $\frac{\partial^2 f_p}{\partial y^2}(a_p, b_p) \leq 0$.

⑧ Or $\Delta f_p = \Delta f + \frac{4}{p} = \frac{4}{p} > 0$. Donc la situation décrite à la question précédente est impossible. On en déduit que f_p atteint son maximum sur D uniquement sur son bord C.

⑨ Le cercle C est compact. On peut donc extraire de la suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $\left(M_{\phi(p)}\right)$ convergeant vers $M = (a, b) \in C$. Comme $\forall (x,y) \in D, \forall p \in \mathbb{N}, f_{\phi(p)}(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{\phi(p)}(x^2+y^2) \leq f_{\phi(p)}(M_{\phi(p)}) = f(M_{\phi(p)}) + \frac{r^2}{\phi(p)}$, on obtient, en faisant tendre p vers $+\infty$ à (x,y) fixé, $\forall (x,y) \in D, f(x,y) \leq f(M) = f(a,b)$.

⑩ On note f_1 et f_2 les deux fonctions harmoniques du plan égales sur C et $f = f_1 - f_2$ leur différence. f est harmonique sur le plan et nulle sur C, donc f est négative sur D. Le même raisonnement s'applique à $-f$: $-f$ est négative sur D. Finalement f est nulle sur D, i.e. f_1 et f_2 sont égales sur D.

Propriété de la moyenne :

❶ La fonction $\psi : (\rho, \theta) \to f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$ est continue sur le domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$. Donc F est continue sur $\mathbb{R}^+$.

❷ Comme f est de sur le plan, la fonction ψ admet une dérivée partielle par rapport à la variable ρ : $\frac{\partial\psi}{\partial\rho}(\rho,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)$ et cette dérivée partielle est continue sur le domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi]$. On déduit du théorème de dérivation sous l'intégrale que F est de sur $\mathbb{R}^+$ et que $F'(\rho) = \int_0^{2\pi} \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\, d\theta$.

❸ En notant $A = -\frac{\partial f}{\partial y}$, $B = \frac{\partial f}{\partial x}$ et la forme différentielle $\alpha = A\, dx + B\, dy$, alors $\rho F'(\rho)$ est l'intégrale curviligne de α sur le cercle Γ de centre M_0, de rayon ρ, parcouru une fois dans le sens positif.

❹ La forme différentielle α est de sur le plan, qui est un ouvert étoilé, et elle est fermée : $\dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial y} = \Delta f = 0$. D'après le théorème de Poincaré, elle est donc exacte et son intégrale sur le cercle est nulle. Donc $\rho F'(\rho) = 0$. Donc F' est nulle sur $]0, +\infty[$ et, par continuité, sur $[0, +\infty[$. On en déduit que F est constante sur $\mathbb{R}^+$: $F = F(0) = 2\pi f(x_0, y_0)$.

❺ On calcule l'intégrale double par passage en polaires d'origine M_0 :

$$I = \int_0^r \left\{ \int_0^{2\pi} f(x_0 + \rho\cos\theta, y_0 + \rho\sin\theta)\, \mathrm{d}\theta \right\} \rho \mathrm{d}\rho = \int_0^r F(\theta)\rho \mathrm{d}\rho = \int_0^r 2\pi f(x_0, y_0)\rho \mathrm{d}\rho = \pi r^2 f(x_0, y_0).$$

Fonctions harmoniques bornées dans le plan :

❻ Soit D le disque inclus dans $D_1 \cap D_2$, de centre le milieu de $[O, M_0]$ et de rayon maximum. Son diamètre vaut $d + 2(r - d) = 2r - d$. On a $\text{aire}(L_2) = \text{aire}(D_2) - \text{aire}(D_1 \cap D_2) \leq \text{aire}(D_2) - \text{aire}(D) = \pi r^2 - \pi(r - \frac{d}{2})^2 = \pi r d - \pi \frac{d^2}{4} \leq \pi r d$.

❼ On note L_1 l'ensemble des points de D_1 qui ne sont pas dans D_2. Alors $\text{aire}(L_1) = \text{aire}(L_2)$.

$\pi r^2 (f(O) - f(M_0)) = \iint_{D_1} f \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} f \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{L_1} f \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{L_2} f \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On en déduit que $\pi r^2 |f(O) - f(M_0)| \leq \iint_{L_1} |f| \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{L_2} |f| \;\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq C.\text{aire}(L_1) + C.\text{aire}(L_2) \leq 2C\pi r d$. D'où la majoration $|f(O) - f(M_0)| \leq 2Cd/r$ valable pour tout $r > 0$. Donc $|f(O) - f(M_0)| \leq 0$. Finalement $f(M_0) = f(O)$, i.e. f est constante.

FIN FIN

Á la prochaine