Corrigé CNC MATH 1 2010

M.SAADAOUI CPGE IBN TAIMYIA

Partie I

1.1. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, d'après Schwarz , $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ par suite la matrice H_x est symétrique réelle , donc il existe une matrice P orthogonale et D diagonale telle que $A = PD\ {}^tP$.

1.2.

1.2.1. f étant de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$, d'après la formule de Taylor-young à l'ordre 2 , si on pose Posons $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $h = (h_1, .., h_n)$, on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2}\left[\sum_{1 \le i,j \le n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right] + o\left(\|h\|^2\right)$$

C'est -à-dire que :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} Q_a(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

$\mathcal{U}$ étant un ouvert et f présente un maximum en $a \in \mathcal{U}$, donc $df(a) = 0$, Par suite

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q_a(h) + o\left(\|h\|^2\right)$$

1.2.2.1 f présente un maximum local en a , donc il existe $r > 0$ tel que :

$$B(a,r) \subset \mathcal{U} \text{ et } \forall x \in B(a,r) \ , \ f(x) \le f(a)$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| \le \dfrac{r}{\|u\|}$, on a $h = a + tu \in B(a,r)$, donc

$$f(a+tu) - f(a) = \frac{1}{2} t^2 Q_a(u) + o\left(t^2\right) \le 0 \ \ (*)$$

1.2.2.2 . D'après $(*)$, on a pour tout $t \in \left[-\dfrac{r}{\|u\|}, \dfrac{r}{\|u\|}\right] \setminus \{0\}$,on a

$$\frac{1}{2} Q_a(u) + o(1) \le 0$$

Par passage à la limite lorsque $t \to 0$, $Q_a(u) \le 0$.
On a pour tout $u \neq 0$, $Q_a(u) \le 0$, de plus $Q(0) = 0$ donc $Q(u) \le 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$

Donc Q_a est négative .

1.2.3 . Notons $e_i = (0, ..., 1, 0, ...0)$ on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = Q_a(e_i) \le 0$

On en déduit que : $\Delta f(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \le 0$

<u>**Bilan :**</u> *Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et atteint son maximum en un point a alors $\Delta f(a) \le 0$.*

1.3. Application :

1.3.1 K étant compacte (car fermé borné en dimension finie) et f est continue sur K , donc bornée et atteint ses bornes .

1.3.2 Supposons que f atteint son maximum en un point a intérieur à K .
D'après la question **1.2,** on a $\Delta f(a) \leq 0$ ce qui est absurde .

On en déduit que la maximum de f sur K est atteint en un point de la frontière de K , donc

$$\sup_{\|x\|\leq 1} f(x) = \sup_{\|y\|=1} f(x)$$

1.3.3. Supposons que f est harmonique sur $\mathcal{U}$.

1.3.3.1. $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \varepsilon \|x\|^2 = \varepsilon\left(x_1^2 + ... + x_n^2\right)$ sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur K et $\mathcal{U}$,
donc $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}) \cap \mathcal{C}^2(K)$.
On a $\dfrac{\partial^2 f_\varepsilon}{\partial x_i^2}(x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) + 2\varepsilon$, donc $\Delta f_\varepsilon = \Delta f + 2n\varepsilon = 2n\varepsilon$ ($\Delta f = 0$ car f harmonique) .

1.3.3.2. f_ε étant continue sur le compact K , donc bornée et y atteint ses bornes
Soit $a \in K$ tel que $f_\varepsilon(a) = \max\limits_{x\in K} f_\varepsilon(x)$.

On a $\Delta(f_\varepsilon) = 2n\varepsilon > 0$ donc d'après **1.3.2**, a ne peut-être intérieur à K , c'est-à-dire que $\|a\| = 1$.
On a donc

$$\forall x \in K\ ,\ f(x) + \varepsilon \|x\|^2 \leq f_\varepsilon(a) = f(a) + \varepsilon \|a\|^2$$

Par passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0$, on a $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in K$. Ainsi $\sup\limits_{x\in K} f(x) = f(a)$
.

On a alors

$$\sup_{x\in K} f(x) = f(a) \leq \sup_{\|y\|=1} f(y) \leq \sup_{\|y\|\leq 1} f(y) \leq f(a) \ .$$

donc $\sup\limits_{\|y\|\leq 1} f(y) = \sup\limits_{\|y\|=1} f(y)$.

1.3.3.3. $\Delta(-f) = -\Delta(f) = 0$, donc d'après ce qui précède il existe $b \in K$ tel que

$$\|b\| = 1 \text{ et } \sup_{x\in K}(-f(x)) = -f(b)$$

On a alors $\forall x \in K\ , -f(x) \leq -f(b)$ donc $f(b) \leq f(x)$ pour tout $x \in K$.
On en déduit que $f(b) = \inf f$. comme $\|b\| = 1$ donc $\inf\limits_{\|z\|=1} f(z) = f(b) \leq f(x)$ pour tout $x \in K$.

<u>Bilan</u> : *Si $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique sur U , alors f est bornée sur K et atteint ses bornes sur la frontière .*

Partie II

2.1. $\widetilde{\psi}$ étant impaire , donc pour $x \in [-\pi, 0]$, $\widetilde{\psi}(x) = -\widetilde{\psi}(-x) = -\psi(-x)$.

Pour $x \in [\pi, 3\pi]$, $\widetilde{\psi}$ étant $2\pi-$périodique , donc $\widetilde{\psi}(x) = \widetilde{\psi}\left(\underbrace{x - 2\pi}_{\in[-\pi,0]}\right) = -\psi(2\pi - x)$

Reste à montrer que $\widetilde{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

<u>Etude en 0</u> .

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ -\psi(-x) & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

$\widetilde{\psi}'(x) = \begin{cases} \psi'(x) & \text{si} \quad x \in]\pi, 0[\\ -\psi(-x) & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \widetilde{\psi}'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \widetilde{\psi}'(x) = \psi'(0)$

Donc $\widetilde{\psi}$ est dérivable en 0 et $\widetilde{\psi}'(x) = \widetilde{\psi}'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \widetilde{\psi}'(x)$

<u>Etude en π</u> .

$$\widetilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \\ -\psi(2\pi - x) & \text{si} \quad x \in [\pi, 3\pi] \end{cases}$$

De même $\quad \widetilde{\psi}'(x) = \begin{cases} \psi'(x) & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ \psi'(2\pi - x) & \text{si} \quad x \in]\pi, 3\pi[\end{cases}$, donc $\lim\limits_{x\to \pi^-} \widetilde{\psi}'(x) = \lim\limits_{x\to \pi^+} \widetilde{\psi}'(x) = \widetilde{\psi}'(\pi)$

Donc $\widetilde{\psi}'$ est dérivable en π et on a $\widetilde{\psi}'(\pi) = \lim\limits_{x\to\pi} \widetilde{\psi}'(x)$.

2.2. $\widetilde{\psi}$ étant $2\pi-$périodique impaire , donc $b_p\left(\widetilde{\psi}\right) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \psi(x)\sin(px)\,dx = 2b_p$.

Et $a_p\left(\widetilde{\psi}\right) = 0$ (car la fonction est impaire) .

2.3. $\widetilde{\psi}$ étant $2\pi-$périodique , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sa série de fourier converge normalement

D'autre part $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left|b_p\left(\widetilde{\psi}\right)\sin(px)\right| = \left|b_p\left(\widetilde{\psi}\right)\right| = 2|b_p|$, donc $\sum\limits_{p\geq 1}|b_p|$ est convergente .

2.4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$, on a $|v_p(x,t)| \leq |b_p|$ et $\sum\limits_{p\geq 1}|b_p|$ étant convergente , donc

$\sum\limits_{p\geq 1} v_p(x,t)$ est normalement convergente .

On a :

pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, v_p est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+$.

$\sum\limits_{p\geq 1} v_p(x,t)$ est normalement convergente donc uniformément .

Par suite $f(x,t) = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} v_p(x,t)$ est continue .

2.5. v_p est évidement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial v_p}{\partial t}(x,t) = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq a$, on a :

$$\left|p^k v_p(x,t)\right| \leq |b_p|\,p^k e^{-p^2 a} \underset{p\to+\infty}{=} o(|b_p|) \qquad \text{car } p^k e^{-p^2 a} \underset{p\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Et $\left|p^k \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)\right| \leq |b_p|\,p^{k+1}e^{-p^2 a} \underset{p\to+\infty}{=} o(|b_p|)$

Et puisque $\sum|b_p|$ est convergente , donc $\sum\limits_{p\geq 1} p^k v_p(x,t)$ et $\sum\limits_{p\geq 1} p^k \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$ sont normalement convergentes .

2.7. Il s'agit de montrer que $x \mapsto \sum\limits_{p=1}^{+\infty} v_p(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, t étant positif .

Posons $U_p(x) = v_p(x,t)$

On a $p \in \mathbb{N}^*$ et U_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ de plus $\left|U_p'(x)\right| = p\left|\dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)\right|$

On a $\sum\limits_{p\geq 1} p^k \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$ est normalement convergente donc uniformément convergente

D'après le théorème de dérivation des séries de fonctions , la fonction $x \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} v_p(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sa dérivée est $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$.

- On a pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
- Et d'après **2.6** , la série $\sum_{p\geq 1} \dfrac{\partial v_p}{\partial x}(x,t)$ étant normalement convergente sur $\mathbb{R}\times [a,+\infty[$, pour tout $a > 0$, donc uniformément convergente $\mathbb{R}\times [a,+\infty[$.

Donc $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

2.8. Même chose . $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\partial v_p}{\partial t}(x,t)$

2.9. Il s'agit de montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ existent et sont continues .

Les raisonnements étant analogue , on va établir l'existence et la continuité de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

On a $\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t) = -p^2 v_p(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}(x,t) = -p^3 b_p \cos(px) e^{-p^2 t}$ et $\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial t^2}(x,t) = p^4 v_p(x,t)$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq a > 0$, on a :

$$\left|\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t)\right| = p^2 |v_p(x,t)| \quad ; \quad \left|\frac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}(x,t)\right| \leq p^3 |b_p| e^{-p^2 a} \; ; \; \left|\frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2}(x,t)\right| = p^4 |v_p(x,t)|$$

$\sum_{p\geq 1} p^2 v_p(x,t)$ et $\sum_{p\geq 1} p^4 v_p(x,t)$ étant normalement convergente, donc uniformément convergent , sur $\mathbb{R}\times [a,+\infty[$, pour tout $a > 0$, d'où l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}$

De même on a $\left|\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x \partial t}(x,t)\right| \leq p^3 |b_p| e^{-p^2 a} = o(|b_p|)$ et $\sum_{p\geq 1} |b_p|$ est convergente , donc la convergence est normale par suite uniforme . d'où l'existence de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

On a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t)$, $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{\partial v_p}{\partial t}(x,t)$

Donc $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\dfrac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial v_p}{\partial t}(x,t) \right) = 0$ Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

2.10. Soit $R > 0$, on a bien que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω_R et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = 0$ sur Ω_R .

$$f(0,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{v_p(0,t)}_{=0} = 0 \text{ et } f(\pi,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \underbrace{v_p(\pi,t)}_{=0} = 0$$

$$f(x,0) = \sum_{p=1}^{+\infty} v_p(x,0) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p \sin(px) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p\left(\widetilde{\psi}\right) \sin(px)$$

D'autre part $\widetilde{\psi}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ $2\pi-$péridique continue donc la série de fourier est normalement convegente et sa somme est égale à $\widetilde{\psi}$ sur $\mathbb{R}$
En particulier :

$$\forall x \in [0,\pi] , \psi(x) = \widetilde{\psi}(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p\left(\widetilde{\psi}\right) \sin(px) = f(x,0)$$

Partie III

3.1.1 Pour tout $t \in]a,b[$, on a $\dfrac{g(t)-g(b)}{t-b} \geq 0$ par passage à la limite lorsque $t \to b$,on a $g'(b) \geq 0$.

3.1.2. Supposons que g présente un maximum local en x_0 , alors il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\ , \ f(x) \leq f(x_0)$$

Pour $h \in]0,\eta[$, on a $\underbrace{\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\leq 0} \times \underbrace{\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}}_{\geq 0} \leq 0$, par passage à la limite on a :

$(f'(x_0))^2 \leq 0$ donc $f'(x_0) = 0$.

Supposons que $g''(x_0) > 0$, on a $g'(x_0) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x)-g'(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g'(x)}{x-x_0} = g''(x_0) > 0$

Par suite il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]x_0-\eta, x_0+\eta[\setminus \{x_0\}, \text{ on ait } \frac{g'(x)}{x-x_0} > 0.$$

Donc $g'(x) < 0$ pour $]x_0-\eta, x_0[$ et $g'(x) > 0$ pour $]x_0, x_0+\eta[$.

D'où le tableau de variation :

	$x_0-\eta$		x_0		$x_0+\eta$
g'		$-$		$+$	
g		$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	

Donc g présente un minimum en x_0 ce qui est absurde .

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, l'utilisation de la formule de Taylor-young simplifiera les choses :

En effet $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \dfrac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2) = \dfrac{h^2}{2}f''(x_0) + o(h^2)$

f présente en x_0 un maximum , donc au voisinage de 0 , on a $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h^2} \leq 0$

C'est-à-dire $\dfrac{1}{2}f''(x_0) + o(1) \leq 0$ au voisinage de 0 , puis par passage à la limite en 0

on a $f''(x_0) \leq 0$.

3.2

F étant continue sur le compact $\overline{\Omega}_r$, donc bornée et atteint ses bornes , il existe alors $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_r$ tel que $F(x_0,t_0) = \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_r} F(x,t)$.

3.2.1 .

Supposons que $(x_0,t_0) \in \Omega_r$. F présente un extremum local en (x_0,t_0) donc il existe $\rho > 0$ tel que

$$\forall (x,t) \in]x_0-\rho, x_0+\rho[\times]t_0-\rho, t_0+\rho[\ , \ F(x_0,t_0) \leq F(x,t)$$

La fonction $h :]t_0-\rho, t_0+\rho[\to \mathbb{R}, x \mapsto F(x_0,t)$ présente alors un maximum en t_0

Donc d'après la question **3.1** , on a $h'(t_0) = 0$ c'est-à-dire $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0) = 0$

De même $g :]x_0-\rho, x_0+\rho[\to \mathbb{R}, x \mapsto F(x,t_0)$ est deux fois dérivable et présente alors un maximum en x_0 .

Donc $g'(x_0)=0$ et $g''(x_0)\leq 0$ c'est-à-dire que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0)=0$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0)\leq 0$.

3.2.2. Supposons que $(t_0,x_0)\in\Lambda_r$, dans ce cas on a $t_0=r$, on a

$$\forall (x,t)\in\Omega_r, F(x,t)\leq F(x_0,t_0)=F(x_0,r)$$

En particulier $\forall x\in\,]0,\pi[,\ F(x,r)\leq F(x_0,r)$.

La fonction $]0,\pi[\,\to\mathbb{R}$,$u:x\mapsto F(x,r)$ est deux fois dérivable et présente un maximum en x_0 , donc

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,t_0)=u'(x_0)=0 \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0)=u''(x_0)\leq 0$$

De même la fonction $]0,r]\to\mathbb{R}$,$h:t\mapsto F(x_0,t)$ est dérivable et présente un maximum en t_0 , donc d'après **III.3.1** , on a $\dfrac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)=h'(t_0)\geq 0$.

3.2.3 . Si $(x_0,t_0)\in\Lambda_r$ alors , d'après **3.2.2.** $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0,t_0)-\dfrac{\partial F}{\partial t}(x_0,t_0)\leq 0$ ce qui est absurde
Donc $(x_0,t_0)\in\Omega_r\backslash\Lambda_r=\Gamma_r$.

3.3.
3.3.1. La suite $(z_p)_{p\geq 1}$ est bornée , d'après Bolzano-Weirstrass , il existe une suite extraite $\left(z_{\sigma(p)}\right)_p$ qui converge . Notons z sa limite . $z_p=(x_p,y_p)\in\Gamma_{r_p}$.
On a $z_p\in\Gamma_{r_p}\subset\Gamma_R$ qui est fermé donc $z\in\Gamma_R$.
Remarquons d'abord que si $r<r'$ alors $\overline{\Omega}_r\subset\overline{\Omega}_{r'}$. $(r_p)_{p\geq 1}$étant croissante , donc $\overline{\Omega}_{r_p}\subset\overline{\Omega}_{r_{p+1}}$

Par suite $\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{r_p}} F(x,t)\leq \sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{r_{p+1}}} F(x,t)$ c'est-à-dire que $F(x_p,t_p)\leq F(x_{p+1},t_{p+1})$.

$\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ étant strictement croissante donc $F\left(z_{\sigma(p+1)}\right)\leq F\left(z_{\sigma(p)}\right)$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
F étant continue , donc par passage à la limite on a $F\left(z_{\sigma(p)}\right)\to F(z)$.

Ainsi $\left(F\left(z_{\sigma(p)}\right)\right)_p$ est croissante de limite $F(z)$, donc $F\left(z_{\sigma(p)}\right)\leq F(z)=\sup\limits_{p\in\mathbb{N}} F\left(z_{\sigma(p)}\right)$

On rappelle que si $(U_n)_n$ est croissante et converge alors sa limite L est égale à $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$

3.3.2. Soit $(x,t)\in[0,\pi]\times[0,R[$, on a $0\leq t<R$ et $r_{\sigma(p)}\to R$, donc il existe p_0 tel que :

$$\forall p\geq p_0,\ 0\leq t\leq r_{\sigma(p)}.$$

Ainsi $(x,t)\in\overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}}$ pour tout $p\geq p_0$
Pour $p\geq p_0$, on a $F\left(z_{\sigma(p)}\right)=\sup\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}}} F(x,t)$ donc

$$\forall (x,t)\in\overline{\Omega}_{r_{\sigma(p)}},\quad F(x,t)\leq F\left(x_{\sigma(p)},t_{\sigma(p)}\right)\leq F(z)=F(x^*,t^*)$$

On a $(x,t)\in[0,\pi]\times[0,R[$,$F(x,t)\leq F(x^*,t^*)$ par continuité de F , on a

$$\text{pour tout } (x,t)\in[0,\pi]\times[0,R]=\overline{\Omega}_R\ ,\ F(x,t)\leq F(x^*,t^*)$$

3.4.

3.4.1 F étant continue sur $\overline{\Omega}_R$ comme de fonctions continues et de même $f\in\left(\mathcal{C}^2,\Omega_R\right)$.
On a pour tout $(x,t)\in\Omega_R$,

$$\frac{\partial^2 F_p}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial F_p}{\partial t}(x,t)=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t)-\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)+\frac{2}{p}\geq\frac{2}{p}>0$$

3.4.2. D'après la question **3.3.** , il existe $(x_p, t_p) \in \Gamma_R$ tel que :

$$F(x_p, t_p) = \sup_{(x,t)\in\overline{\Omega}_R} F_p(x,t)$$

3.4.3 , on a pour tout $(x,t) \in \overline{\Omega}_R$,

$$(*) : F(x,t) \leq F_p(x,t) = F(x,t) + \frac{x^2}{p} \leq F(x_p, t_p) + \frac{x_p^2}{p} \leq F(x_p, t_p) + \frac{R^2}{p}$$

La suite $((x_p, t_p))_{p\geq 1}$ est une suite d'éléments du compact Γ_R , d'après Bolzano-Weirstraas il existe une suite $\left((x_{\theta(p)}, t_{\theta(p)})\right)_{p\geq 1}$ qui converge vers un élément $(x^*, t^*) \in \Gamma_R$.

On a , à l'aide de $(*)$, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$F(x,t) \leq F\left(x_{\theta(p)}, t_{\theta(p)}\right) + \frac{R^2}{\theta(p)} \leq F\left(x_{\theta(p)}, t_{\theta(p)}\right) + \frac{R^2}{p}$$

Par passage à la limite lorsque $p \to +\infty$, on a :

$$\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_R \text{ , } F(x,t) \leq F(x^*, t^*)$$

3.5. Supposons que F est nulle sur Γ_R et que $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 0$.

On a $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) - \dfrac{\partial F}{\partial t}(x,t) \geq 0$ donc d'après la question précedente , il existe $(x^*, t^*) \in \Gamma_R$ tel que :

$$\forall (x,t) \in \overline{\Omega}_R \text{ , } F(x,t) \leq F(x^*, t^*) = 0 \quad (\text{ car } F \text{ est nulle sur } \Gamma_R \text{ })$$

Donc $F \leq 0$.

la fonction $-F$ satisfait les mêmes conditions , donc $-F \leq 0$ c'est-à-dire que $F \geq 0$.
On en déduit que $F = 0$.

3.6. C'est des vérifications immédiate à faire .