**CPGE My Youssef, Rabat**

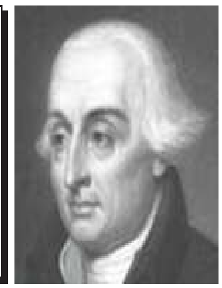
بِسمِ اللَّهِ الرَّحمَنِ الرَّحِيمِ
وَ قُلِ إِعمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُم وَ رَسُولُهُ وَ
المُؤ مِنُون

صَدَقَ اللَّهُ العَظِيم

# DL 4 (09-10): *Calcul différentiel*

**21 novembre 2009**

***Blague du jour***
**Lors d'un discours prononcé devant une assemblée de professeurs de mathématiques, George W.Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrêmistes.**
**«Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide de radicaux.Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...»**



***Mathématicen du jour*** ***Lagrange.***
**Joseph Louis, comte de Lagrange, en italien Giuseppe Lodovico Lagrangia (1736-1813), est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. Né en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père.**
**Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'École normale et à l'École polytechnique.**

1) ***Extrema liés : la règle des multiplicateurs de Lagrange.*** **Soit** $U$ **un ouvert de** $\mathbb{R}^n$ **et** $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^1$**. Soient** $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ **de classe** $\mathcal{C}^1$ **où** $1 \leq i \leq m$ **et** $V = \{x \in U$ **tel que** $f_i(x) = 0,\ \forall 1 \leq i \leq m\}$**. Montrer le résultat suivant :**
**Si** $f|_V$ **admet un extremum local en un point** $a \in V$**, alors**

$$\exists (\lambda_i)_{1\leq i\leq m} \text{ tel que } \overrightarrow{\mathbf{grad}} f(a) = \sum_{i=1}^{p} \overrightarrow{\mathbf{grad}} f_i(a)$$

**Les coéfficients** $(\lambda_i)_{1\leq i\leq m}$ **s'appellent multiplicateurs de Lagrange.**

2) ***Application : Distance d'un point à une sous-espace affine.***
**Soient** $\mathcal{E}$ **un sous-espace affine de** $\mathbb{R}^n$ **de dimension** $p$ **et** $a \in \mathbb{R}^n$ **tel que** $a \in \mathcal{E}$**, on se propose de donner une formule pour calculer**

$$d(a, \mathcal{E}) = \min_{x \in \mathcal{E}} d(a, x)$$

a) **Montrer que la distance de** $a$ **à** $\mathcal{E}$ **est réalisée en un seul point,** $x_a = p_{\mathcal{E}}(a)$ **la projection orthogonale de** $a$ **sur** $\mathcal{E}$**, i.e.**

$$d(a, \mathcal{E}) = d(a, x_a)$$

b) **Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{n-p,n}(\mathbb{R})$ tel que $\text{rg}(A) = n - p$ et $\exists b \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathcal{E}$ soit d'équation $Ax + b = 0$, i.e.,**

$$x \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow Ax + b = 0$$

c) **Montrer que $\ker A = \ker(A^t A)$, puis en déduire que $A^t A$ est inversible.**

d) **Montrer que $x_a = a - ({}^t A).(A^t A)^{-1}(Aa + b)$, en déduire que**

$$d(a, \mathcal{E}) = \|({}^t A).\left(A^t A\right)^{-1}(Aa + b)\|$$

e) **Soit** $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(a,x)^2 \end{array}$ **, calculer $\overrightarrow{\textbf{grad}} f(x)$, puis en déduire que**

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}^{n-p} \textbf{ tel que } x_a - a = \overrightarrow{\textbf{grad}} f(x_a) = ({}^t A).\lambda$$

f) **Montrer ensuite que**

$$\lambda = -\left(A^t A\right)^{-1}(Aa + b).$$

g) **Si $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$ d'équation $\mathcal{H} : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b = 0$ et $M = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{H}$, montrer que**

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}$$

3) ***Le quotient de Rayleigh.***

a) **Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré $d$ si elle vérifie la relation suivante :**

$$f(\lambda x) = \lambda^d(f(x)),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

**Montrer que si $f$ est homogène de degré $d$ et bronée sur la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$, alors $\exists \alpha \geq 0$ tel que $|f(x)| \leq \alpha \|x\|^d,\ \forall x \in \mathbb{R}^n$.**

b) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et on pose**

$$R(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle},\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \textbf{Quotient de Rayleigh.}$$

**Montrer que que la fonction $f : x \mapsto \langle Ax, x\rangle$ est homogène.**
**Montrer que la fonction $x \mapsto R(x)$ admet un minimum et maximum globaux.**

c) **Montrer que $a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ est un extremum pour la fonction $x \mapsto R(x)$ si et seulement si $\dfrac{a}{\|a\|}$ est un extremum pour la fonction $x \mapsto f(x)$.**

d) **Soit $a \in \mathbb{S}^{n-1}$ extremum pour $f$, montrer que**

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \textbf{ tel que } Aa = \lambda a$$

***Indication : Penser à utiliser le principe des extremas liés de Lagrange pour la focn-tion $f$ et $f_1 : x \mapsto \|x\|^2 - 1$.***

e) **En déduire que**

$$\min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \min_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda| \quad , \quad \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \max_{\lambda \in \text{sp}(A)} |\lambda|$$

*Fin*
*à la prochaine*