Mamouni My Ismail

Devoir libre N°10

Résolution d'une EDP Changement de variables

MP-CPGE Rabat

Vendredi 3 Décembre 2010

Blague du jour

Une fonction constante et $\exp$ marchent tranquillement dans la rue. Soudain la ils aperçoivent la différentielle qui approche. Se sentant menacée, la fonction constante se sauve. Dans un air moqueur et de défi, l'$\exp$ crie : Ah !Ah ! je m'inquiète pas, MOI, je suis une puissance, je suis ex. Dans quelques minute la différentielle revient avec juste sa force partielle et crie : Salut, MOI, je suis $\dfrac{\partial}{\partial y}$.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Mathématicien du jour

Philosophe, scientifique, mathématicien, diplomate, bibliothécaire et homme de loi allemand. Orphelin de père à 6 ans, il a quand même réussi une carrière florissante. Il est reconnu comme le plus grand intellectuel d'Europe, pensionné par plusieurs grandes cours, il tait aussi correspondant des souverains et souveraines. Comme philosophe, il s'est intéressé fort tôt à la scolastique et à la syllogistique. Il a conçu le projet d'une encyclopédie ou bibliothèque universelle . Comme mathématicien, il a fait entrer les sciences dans la nouvelle ère de l'analyse intégra-différentielle.

Notations.

- Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0, y > 0\}$ et f est de classe C^2 sur D.
- On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}, t = \dfrac{y}{x}$ et $f(x, y) = g(r, t)$.
- On pose enfin $Tf(x, y) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $N_a = \{f \in \mathcal{C}^1(D)$ tel que $Tf - af = 0\}$.

1 Montrer que D est un ouvert.

2 Préciser le domaine de définition de g, puis justifiez qu'elle est de classe C^2.

3 Si $(f, h) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(D)$, exprimer $T(fh)$ en fonction de f, h, Tf et Th.

4 Si $(f, \varphi) \in \mathcal{C}^1(D) \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, donner l'expression de $T(\varphi \circ f)$.

5 Exprimer Tf en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial t}, r, t$.

6 Calculer Tt.

7 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*})$ alors $\varphi \circ t \in N_0$.

8 En déduire la forme générale des fonctions $f \in N_0$.

9 Calculer Tr.

10 Montrer que $f \in N_0 \Longleftrightarrow rf \in N_1$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11 Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $t(r^a)$, en déduire la forme générale des fonctions $f \in N_a$.

12 On se propose dans la suite de résoudre l'équation : (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$.

a On suppose d'abord que : $a = b$ Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \varphi(r)h$ où $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ que l'on explicitera, en déduire la forme générale des solutions de (*).

b On suppose maintenant que : $a \neq b$ Montrer que (*) admet une solution particulière f_0 de la forme $f_0 = \lambda h$ où λ est une constante que l'on explicitera ; en déduire la forme générale des solutions de (*).

13 Résoudre les équations suivants :

a $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2+xy}$.

b $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2f(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$.

À la prochaine

.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir libre N°10 (Pr Mamouni)

Résolution d'une EDP
Changement de variables

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Pour une question bien précise :
- Un ingénieur pense que ses équations sont une approximations de la réalité.
- Un physiciens pense que la réalité est une approximation de ses équations.
- Un mathématicien s'en moque.

John Machin (1680 - 1751)

Mathématicien du jour

Mathématicien anglais, connu principalement pour avoir calcul en 1706, 100 décimales de π grâce à la formule qui porte son nom : $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan 1239$. Malgré un nom de famille très drôle, John Machin a enseigné les mathématiques à Brook Taylor. Il était aussi professeur d'astronomie, secrétaire de la Royal Society et membre de la commission qui décida de la priorité de Calcul entre Leibniz et Newton en 1712.

.

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_1(x,y) > 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } f_2(x,y) > 0\}$ est un ouvert en tant qu'intersection de deux ouverts, car les fonctions $f_1(x,y) \longmapsto x$ et $f_2(x,y) \longmapsto y$ sont continues.

2) La linéarité de l'application $T : f \longrightarrow T(f)$ découle de celle des dérivées partielles.

3) $T(fh) = fT(h) + hT(f)$ car $\dfrac{\partial(fh)}{\partial x} = f\dfrac{\partial h}{\partial x} + h\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial(fh)}{\partial y} = f\dfrac{\partial h}{\partial y} + h\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4) $T(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)T(f)$ car $\dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial x} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial(\varphi \circ f)}{\partial y} = (\varphi' \circ f)\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

5) D'aprés les formules du cours : $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial t}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$, on en déduit que $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial t} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\partial 1}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial t} \end{cases}$

d'où $T(f) = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = r\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

6) $Tt = 0$, simple calcul.

7) $T(\varphi \circ t) = (\varphi' \circ)Tt = 0$, donc $\varphi \circ \in N_0$.

8) D'aprés ce qui précède, si $f = \varphi \circ t$, alors $f \in N_0$. Inversement soit $f \in N_0$, alors $T(f) = r\dfrac{\partial g}{\partial r} = 0$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) = 0$, donc $g(r,t) = \varphi(t)$, d'où $f(x,y) = g(r,t) = \varphi(t) = \varphi \circ t(x,y)$. Donc $\varphi \circ t$ est la forme générale des éléments de N_0.

9) $Tr = r$, simple calcul.

10) $rf \in N_1 \iff T(rf) = rf \iff rT(f) + fT(r) = rf \iff T(f) = 0$ car $Tr = r$, ainsi $f \in N_1 \iff \frac{1}{r}f \in \mathbb{N}_0 \iff \frac{1}{r}f = \varphi \circ t \iff f = r\varphi \circ t$, c'est la forme générale des fonctions $f \in N_1$.

11) Pour $a \in \mathbb{R}$, calculer $T(r^a) = T\left((x^2+y^2)^{\frac{a}{2}}\right) = ar^a$, de la même façon que précédement, on a $T(r^a f) = r^a T(f) + ar^a f$, donc $r^a f \in N_a \iff f \in N_0$ et on en déduit que la forme générale des fonctions $f \in N_a$ est $f = r^a \varphi \circ t$.

12) (*) $Tf - af = bh$ où $h \in N_b$, donc $Th = bh$.

a) Supposons $a = b$, soit $f_0 = \varphi(r)h$ une solution particulière f_0 où $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^{+*})$, donc $Tf_0 = T((\varphi \circ r)h) = (\varphi \circ r)Th + hT(\varphi \circ r) = (\varphi \circ r)bh + h(\varphi' \circ r)Tr = bf + rh(\varphi' \circ r)$, ainsi $Tf_0 - af_0 = bh$ devient $(b-a)f_0 + rh(\varphi' \circ r) = h$, d'où $r\varphi'(r) = 1$, c'est une équation différentielle du 1èr ordre de solution $\varphi(r) = \ln r$. Soit f une solution générale de (*), comme l'est f_0 aussi, alors $T(f - f_0) - a(f - f_0) = 0$, d'où $f - f_0 \in N_a$, donc $f - f_0 = r^a \varphi \circ t$, d'où $f = f_0 + r^a \varphi \circ t = \ln r + r^a \varphi \circ t$ c'est la forme générale des solutions de (*) quand$a = b$

b) On suppose maintenant que : $a \neq b$. Soit $f_0 = \lambda h$ alors $Tf_0 = \lambda Th = \lambda bh$, $Tf_0 - af_0 = h$ donne $\lambda = \dfrac{1}{b-a}$. De façon pareille toute solution f de (*) s'écrit sous la forme $f = f_0 + r^a \varphi \circ t = \dfrac{1}{b-a}h + r^a \varphi \circ t$, c'est la forme générale des solutions de (*) quand $a \neq b$.

13) a) Pour cette équation $a = 1$, $h(x,y) = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2-xy}$. Les calculs montrent que $Th = 0$, d'où $b = 0$, donc $a \neq b$, d'où $f(x,y) = -h(x,y) + \sqrt{x^2+y^2}\,\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Ici $a = 2, h(x,y) = \dfrac{(x^2+y^2)(x-y)}{x+y}$. Les calculs montrent que $Th = 2h$, d'où $a = b = 2$, donc $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, où $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

À la prochaine