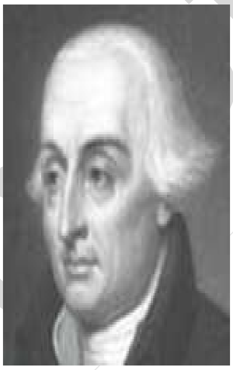
Devoir Surveillé

4 Calcul Différentiel, Courbes & Surfaces

Blague du jour

Lors d'un discours prononcé devant une assemble de professeurs de mathématiques, George W.Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrémistes.
Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide des radicaux. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...



Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813)

En italien Giuseppe Lodovico Lagrangia , est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. N en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père.
Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'école normale et à l'école polytechnique.

Mathématicien du jour

Problème : extrait X 2004, MP

Courbures des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace $\mathbb{R}^3$ et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier $n > 0$, l'espace $\mathbb{R}^n$ sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(\cdot \mid \cdot)$ et $\|\cdot\|$. La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

Première partie

1. Soient $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ des éléments de $\mathbb{R}^{n+1}$, $\left(x_j^{(i)}\right)_{j=1,\ldots,n+1}$ les composantes de $x^{(i)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. Pour tout $k = 1, \cdots, n+1$ on note V_k le produit par $(-1)^{k+1}$ du déterminant de la matrice $\left(x_j^{(i)}\right)$ où $i = 1, \cdots, n$ et $j = 1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n+1$. On note V le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ de composantes V_k.

a) Montrer que V est orthogonal à tous les $x^{(i)}$.

b) Comparer les conditions suivantes :

i) $V = 0$

ii) la famille $\left(x^{(i)}\right)_{i=1,\cdots,n}$ est liée.

c) Exprimer en fonction de $\|V\|$ le déterminant des $n+1$ vecteurs $V, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

2. **a)** Montrer que, pour tout n-uple de vecteurs $\left(x^{(1)},\cdots,x^{(n)}\right)$ linéairement indépendants, il existe un unique vecteur $W\left(x^{(1)},\cdots,x^{(n)}\right)$ ayant les propriétés suivantes

i) $W\left(x^{(1)},\cdots,x^{(n)}\right)$ est de norme 1 et orthogonal à tous les $x^{(i)}$

ii) le déterminant des $n+1$ vecteurs $W\left(x^{(1)},\cdots,x^{(n)}\right)$, $x^{(1)}$, …, $x^{(n)}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est strictement positif.

b) Vérifier que, pour toute rotation R de $\mathbb{R}^{n+1}$, on a

$$W\left(R(x^{(1)}),\ldots,R(x^{(n)})\right)=R\left(W\left(x^{(1)},\cdots,x^{(n)}\right)\right).$$

3. Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$, Q la matrice de coefficients $q_{i,j}=(e_i\mid e_j)$.

a) Montrer que Q est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

b) Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées v_i dans la base $(e_1,\ldots,e_n)$. Exprimer le vecteur ligne $(v_1,\ldots,v_n)$ en fonction de Q et du vecteur ligne $((v\mid e_1),\ldots,(v\mid e_n))$.

Dans la suite du problème, on désigne par U une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$, par $u=(u_1,\ldots,u_n)$ un élément quelconque de U, par F une application de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^{n+1}$, par $\partial_i F$ (resp. $\partial_i\partial_j F$) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les n vecteurs $(\partial_i F)(u)$ sont linéairement indépendants pour tout u, et on pose $W(u)=W\left((\partial_1 F)(u),\ldots,(\partial_n F)(u)\right)$.

4. **a)** Vérifier que l'application $u\mapsto W(u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

b) Comparer $((\partial_k W)(u)\mid(\partial_i F)(u))$ et $(W(u)\mid(\partial_i\partial_k F)(u))$.

c) Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels $a_{i,j}(u)$ tels que l'on ait

$$(\partial_i W)(u)=\sum_j a_{i,j}(u)(\partial_j F)(u).$$

d) On note respectivement $A(u)$, $S(u)$, $Q(u)$ les matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}(u)$, $(W(u)\mid\partial_i\partial_j F)(u))$, $((\partial_i F)(u)\mid(\partial_j(F)(u)))$. Vérifier que $A(u)=-S(u)Q(u)^{-1}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $n=2$; on a donc un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et une application F de classe $\mathcal{C}^2$ de U dans $\mathbb{R}^3$ telle que les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ soient linéairement indépendants pour tout u de U. On a en outre

$$W(u)=\frac{(\partial_1 F)(u)\wedge(\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u)\wedge(\partial_2 F)(u)\|}$$

où $\cdot\wedge\cdot$ désigne le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$. On pose

$$K(u)=\det A(u),\ H(u)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A(u))$$

où $A(u)$ est la matrice définie à la question **4.d)**. On note $F_i(u)$, $i=1,2,3$, les composantes de $F(u)$; on suppose que U contient le point 0 et on fait l'étude de la surface $F(U)$ au voisinage du point $F(0)$.

5. Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$. Montrer que les objets $\hat{K}(0)$ et $\hat{H}(0)$ associés à l'application $\hat{F}=R\circ F$ sont égaux respectivement à $K(0)$ et $H(0)$.

6. On suppose que, pour u suffisamment voisin de 0, $F(u)$ est de la forme

$$F(u)=(u_1,u_2,f(u_1,u_2))$$

avec $f(0)=(\partial_1 f)(0)=(\partial_2 f)(0)=0$.

a) Calculer $K(0)$ et $H(0)$ en fonction des nombres

$$r=(\partial_1\partial_1 f)(0),\ s=(\partial_1\partial_2 f)(0),\ t=(\partial_2\partial_2 f)(0).$$

b) (Cas d'un cylindre) On suppose que $f(u_1,u_2)$ est fonction de u_1 seul, soit $f(u_1,u_2)=g(u_1)$. Exprimer $H(0)$ en fonction de la courbure de la courbe Γ, intersection du cylindre avec le plan $x_2=0$.

7. Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = (f(u_1)\cos u_2, f(u_1)\sin u_2, u_1)$$

où f est une fonction strictement positive de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un intervalle I.

a) Dire pour quelles valeurs de u les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ sont linéairement indépendants.

b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1}\left(1 + f'(u_1)^2\right)^{-3/2}\begin{pmatrix} f(u_1)f''(u_1) & 0 \\ 0 & -\left(1+f'(u_1)\right)^2 \end{pmatrix}.$$

c) Donner une fonction f élémentaire pour laquelle $H(u)$ est nul pour tout u.

d) Montrer que, pour tous nombres réels α et β, $\alpha > 0$, il existe f satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u,\ f(0) = \alpha,\ f'(0) = \beta.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

e) Calculer $K(u)$ pour une telle fonction f.

8. Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles $K(u)$ et $H(u)$ sont des constantes.

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions H et K. Dans la situation du début de la deuxième partie on note $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ la matrice (jacobienne) de coefficients $\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)_{i,j} = \partial_j F_i$. Notation analogue pour $\dfrac{\partial W}{\partial u}$.

9. Vérifier que $\dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{\partial F}{\partial u}{}^t A(u)$.

On se donne maintenant un difféomorphisme Φ de U sur un autre ouvert $\tilde{U}$ de $\mathbb{R}^2$ et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$. Pour tout $u \in U$ on écrira aussi $\tilde{u} = \Phi(u)$; on pose $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$, c'est-à-dire $\tilde{F} = F \circ \Psi$, et on note $\tilde{W}(\tilde{u})$, $\tilde{A}(\tilde{u})$, $\tilde{K}(\tilde{u})$, $\tilde{H}(\tilde{u})$ les objets définis à partir de $\tilde{F}$ et $\tilde{u}$ comme $W(u)$, $A(u)$, $K(u)$, $H(u)$ l'ont été à partir de F et u. On suppose U connexe par arcs.

10. a) Exprimer $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$, puis $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$ en fonction de $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$ et $\det \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que l'on ait $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$ pour tout $u \in U$.

c) Exprimer $\tilde{A}(\tilde{u})$ en fonction de ε, $A(u)$ et $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

d) Comparer $\tilde{H}(\tilde{u})$ et $H(u)$, $\tilde{K}(\tilde{u})$ et $K(u)$.

Problème : Mines-Ponts 2004, MP

Soit φ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\text{si } |t| < 1,\ \varphi(t) = \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right);\quad \text{si } |t| \geq 1,\quad \varphi(t) = 0.$$

. Un difféomorphisme f de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même de classe C^1 est dit difféomorphisme de classe C^∞ si la fonction f est indéfiniment dérivable.

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe C^∞ :

18. Démontrer que la restriction φ_I de la fonction φ à l'intervalle ouvert $I =]-1, 1[$ est indéfiniment dérivable et que, pour tout entier n, il existe un polynôme P_n tel que la dérivée $\varphi_I^{(n)}$ de φ_I d'ordre n s'écrive sous la forme suivante :

Former pour réussir

$$\varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$

19. En déduire que la fonction φ est indéfiniment dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Justifier, sans calcul, l'existence d'un majorant M de la valeur absolue de la dérivée première φ' sur la droite réelle :

$$M = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|.$$

Étant donné un réel λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, soit ψ_λ la fonction définie sur la droite réelle par la relation suivante :

$$\psi_\lambda(x) = x + \lambda\, \varphi(x).$$

20. Démontrer que, si la valeur absolue du réel λ est strictement majorée par $1/M$, $(|\lambda| < 1/M)$, la fonction ψ_λ est une bijection de la droite réelle $\mathbb{R}$ sur elle-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}$.

Quelle est, dans ces conditions $(|\lambda| < 1/M)$, l'image du segment $\overline{I} = [-1, 1]$ par l'application $x \longmapsto \psi_\lambda(x)$? Que dire de la restriction de l'application $x \longmapsto \psi_\lambda(x)$ aux demi-droites fermées $]-\infty, -1]$ et $[1, \infty[$?

Un difféomorphisme de classe C^1 du plan $\mathbb{R}^2$, défini par des fonctions indéfiniment dérivables est appelé difféomorphisme de classe C^∞.

Difféomorphismes du plan $\mathbb{R}^2$ de classe C^∞ :

Le plan $\mathbb{R}^2$ est supposé muni de la norme euclidienne et rapporté à un repére orthonormé Oxy.

Étant donnés un réel λ $(\lambda \in \mathbb{R})$, un réel strictement positif r $(r > 0)$ et un point P du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (p, q), soit $\theta^P_{\lambda,\,r}$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par la relation suivante :

$$\theta^P_{\lambda,\,r} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x + \lambda\, \varphi\left(\left((x-p)^2 + (y-q)^2\right)/r^2\right) \\ y \end{pmatrix}.$$

L'image du point de coordonnées (x, y) par l'application $\theta^P_{\lambda,\,r}$ est le point de coordonnées :

$$\left(x + \lambda\, \varphi\left(\frac{(x-p)^2 + (y-q)^2}{r^2}\right),\ y\right).$$

21. Quelle est l'image par cette application $\theta^P_{\lambda,\,r}$ du point P ? du cercle C^P_r de centre le point P et de rayon égal à r ? de l'ouvert Ω^P_r des points du plan situé à une distance du point P strictement supérieure à r ?

Existence de difféomorphismes du plan de classe C^∞ :

22. Démontrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que, si le réel λ a une valeur absolue strictement inférieure à m $(|\lambda| < m)$, l'application $\theta^P_{\lambda,\,r}$ est une bijection du plan $\mathbb{R}^2$ sur lui-même et un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^2$.

Soient n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ du plan $\mathbb{R}^2$, deux à deux distincts, et deux points B et B', distincts entre eux et distincts des points A_i, $1 \leq i \leq n$. Les coordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont (x_i, y_i), $1 \leq i \leq n$; celles de B et B' respectivement (b, c) et (b', c').

Le but des questions 23 à 26 est de montrer qu'il existe un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ transformant B en B' et laissant les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ invariants. Un difféomorphisme de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ laissant les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ invariants est dit avoir la propriété $\mathcal{A}$.

Il est admis que l'ensemble des difféomorphismes de classe C^∞ du plan $\mathbb{R}^2$ est un groupe pour la loi de composition des applications. Trois cas sont envisagés :

1er cas : Les points B et B' ont même ordonnée ; les ordonnées des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B $(y_i \neq c = c')$.

23. Démontrer, dans ce cas, que, si les points B et B' sont suffisamment proches, il existe une application $\theta^P_{\lambda,\,r}$ transformant B en B' et laissant les A_i, $1 \leq i \leq n$ invariants.

24. Démontrer, toujours dans ce cas, que, quelle que soit la position des points B et B', il existe une suite finie de bijections $\theta^{P_i}_{\lambda,\,r}$, $0 \leq i \leq k$, telle que la composée F de ces applications transforme B en B' et ait la propriété $\mathcal{A}$.

$$F = \theta^{Pk}_{\lambda,\,r} \circ \theta^{P_{k-1}}_{\lambda,\,r} \circ \ldots \circ \theta^{P_0}_{\lambda,\,r}.$$

2^{ième} cas : Les points B et B' ont même abscisse ; les abscisses des points A_i, $1 \leq i \leq n$, sont toutes différentes de celle de B $(x_i \neq b = b')$.

25. Indiquer comment modifier l'application $\theta^P_{\lambda,\,r}$ en $\eta^P_{\lambda,\,r}$ pour construire un endomorphisme G transformant B en B' et ayant la propriété $\mathcal{A}$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com