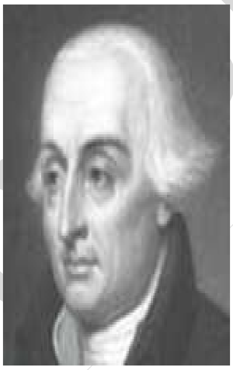
Devoir Surveillé

4 Calcul Différentiel, Courbes & Surfaces

Blague du jour

Lors d'un discours prononcé devant une assemble de professeurs de mathématiques, George W.Bush les met en garde contre le mauvais usage des mathématiques pour inculquer aux jeunes américains des visions politiques extrémistes.
Si j'ai bien compris, dit le président, dans vos cours d'algèbre vous apprenez à vos étudiants la résolution des problèmes et d'équations avec l'aide des radicaux. Je ne peux pas dire que j'approuve ceci...



Joseph Louis, comte de Lagrange (1736-1813)

En italien Giuseppe Lodovico Lagrangia , est un mathématicien, mécanicien et astronome franco-italien. N en Italie, mais de famille française par son arrière-grand-père.
Fondateur du calcul des variations avec Euler et de la théorie des formes quadratiques, son nom figure partout en mathématiques. Il développe la mécanique analytique, pour laquelle il introduit les multiplicateurs de Lagrange. Il entreprend aussi des recherches importantes sur le problème des trois corps en astronomie. Il élabore le système métrique avec Lavoisier et enseigne les mathématiques à l'école normale et à l'école polytechnique.

Mathématicien du jour

Problème : extrait cnc 2007, PSI

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\overrightarrow{E}$, et $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormée direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de $\overrightarrow{E}$ se notera $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$.
Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ, on note :
- s l'abscisse curviligne de M sur γ,
- $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\overrightarrow{N}$ le vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{T},\overrightarrow{N}}) = \dfrac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\overrightarrow{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta + \dfrac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta), \overrightarrow{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{T}})$.

Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1+\cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

① ① Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.

② Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.

③ Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0,\pi],\psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0,\pi]$.

② Préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π.

③ Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.

④ Étudier la fonction $\rho : \theta \longmapsto 1+\cos\theta$ sur le segment $[0,\pi]$ et dresser son tableau de variations.

⑤ Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).

⑥ Calculer la longueur de l'arc γ_2.

⑦ Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1.

Deuxième partie

A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

① Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

② Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f'.

③ Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

④ Exprimer les coordonnées de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

① Préciser les coordonnée de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

② Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta+\pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

③ On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $\big(OM(\theta)\big)$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ.

④ On note γ_I et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1, γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.

⑤ Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

Exercice I : extrait e3a 2008, MP

Exercice I : extrait e3a 2008, MP

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2).$$

Dans l'exercice, on considère le disque unité D et le cercle unité C :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. On se propose d'étudier les éventuels extrema locaux de f.
   - 1a). Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.
   - 1b). Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ de f au point (x_0, y_0).
   - 1c). Démontrer que les points (x_0, y_0) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ sont exactement les points $(1,0)$ et $(-1,0)$.
   - 1d). Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $(h,k) \longmapsto f(1+h,k)$ au voisinage de $(0,0)$. Le point $(1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ?
   - 1e). De même, le point $(-1,0)$ est-il un extremum local de f ? Si oui, est-ce un minimum ou un maximum local ? Justifier votre réponse.
   - 1f). Quels sont les extrema locaux de f ? On énoncera avec soin le théorème utilisé.
2. Désormais, soit g la fonction définie sur le disque unité D par $g(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.
   - 2a). Justifier que g admet un maximum A et un minimum a sur D.
   - 2b). Démontrer que A ne peut être atteint que sur le cercle C.
   - 2c). Montrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $g(\cos t, \sin t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$. En déduire la valeur de A et les points de C sur lesquels f atteint cette valeur.
   - 2d). Déterminer la valeur de a et les points de C sur lesquels g atteint cette valeur.

Á la prochaine