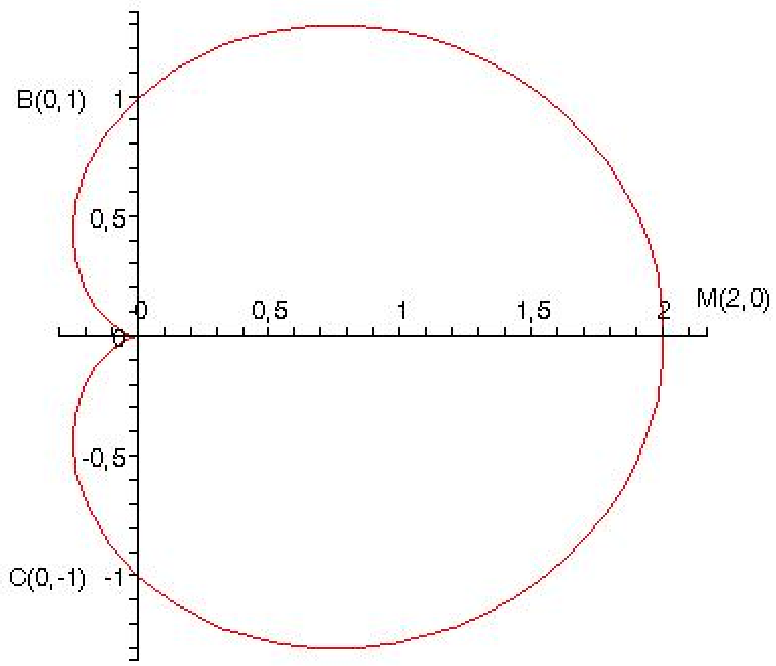
◘ Corrigé Problème : Pr. Chabchi, CPGE Marrakech

PARTIE I

1. .
   (a) Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R}$ et ρ est $2\pi-$périodique.
   (b) Par parité de la fonction cosinus, ρ est aussi paire, donc l'arc γ_1 est symétrique par rapport à l'axe $\left(O\,\vec{\mathbf{i}}\right)$.
   (c) Le support de γ_1 est obtenu en prenant le support de γ_2 union son symétrique par rapport à l'axe $\left(O\,\vec{\mathbf{i}}\right)$.
2. Le pôle O est paramétré par $\theta = \pi$, de plus $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$. Puisque 2 est pair alors le pôle O est un point de rebroussement du premier espèce et la tangente est porté par $\vec{u}(\pi)$, càd horizontale.
3. Soit $M_0 = \phi(\theta_0)$ un point de γ_1 autre que le pôle O, donc $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ avec $\theta_0 \neq \pi$. On a alors
   $\rho^2(\theta_0) + 2(\rho'(\theta_0))^2 - \rho(\theta_0)\rho''(\theta_0) = 3(1 + \cos(\theta_0)) > 0$. Ainsi la concavité de γ_1 en M_0 est tournée vers le pôle O (ou contient le pôle O) .
4. On a la fonction ρ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\rho'(\theta) = -\sin(\theta) \leq 0$. Donc est décroissante sur $[0, \pi]$: elle décroit de la valeur $\rho(0)$ =2 à la valeur $\rho(\pi)$ =0.
5. Le tracé est ci-contre :



- La tangente à l'origine est horizontale
- Le point $M(2,0)$ est paramétré par $\theta = 0$, puisque $\rho(0) = 2 \neq 0$ et $\rho'(0) = 0$, la tangente est alors portée par $v(0) = \vec{j}$ càd verticale.

- Le point $B(0,1)$ est parmétré par $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, puisque $\rho\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\rho'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$. Si $V\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \left(\widehat{\vec{u}\left(\dfrac{\pi}{2}\right), \vec{T}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}\right)$ désigne l'angle que le vecteur $\vec{u}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ avec le vecteur tangent, alors ici $\tan\left(V\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$, donc $V\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$. Dans $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ cette tangente a pour équation : $y = x + 1$
- Par symètrie, la tangente en $C(0,-1)$ dans $\mathcal{R}\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ a pour équation : $y = -x - 1$.

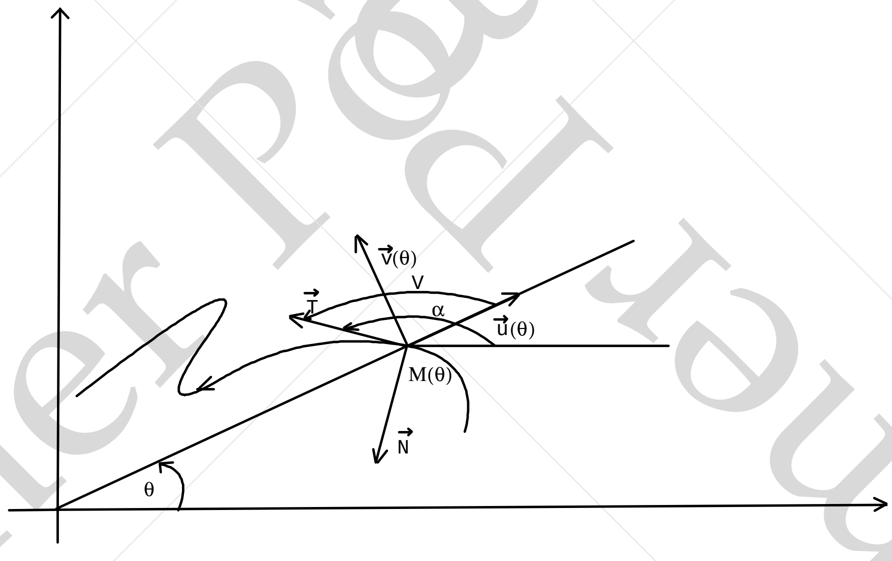
6. L'arc γ_1 étant de classe C^1, donc sa longueur $l(\gamma_1)$ est donnée par : $l(\gamma_1) = \displaystyle\int_0^{2\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta = 2\int_0^{\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta$ par symétrie, donc
$l(\gamma_1) = 2\displaystyle\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2(\theta) + (1+\cos(\theta))^2}d\theta = 2\int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos(\theta))}d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 8$

7. L'aire cherché est donnée par la formule de Green-Reimman en polaire: $\text{Aire}(\gamma_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\overleftarrow{\partial\gamma_1}} \rho^2 d\theta$: il s'agit ic d'intégrale curviligne, où $\overleftarrow{\partial\gamma_1}$ désigne la fronière de γ_1 orienté dans le sens direct.
Donc $\text{Aire}(\gamma_1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi}(1+\cos(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos(\theta) + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$.

PARTIE II

A- Questions de cours

1. Voir figure ci-contre : (permettez mes outils de dessin vectoriel modestes!)



2. L'abscisse curvuligne est un paramétrage admissible de l'arc γ, elle consiste à choisir une origine et de paramétrer chaque point par la longueur (algébrique) de l'arc joignant ce point à l'origine. dans ce cas la courbe est parcourue à vitesse uniforme valant 1.

   On choisit pour origine $\theta = 0$, et on oriente γ dans le sens des θ croissant. Alors $s(\theta) = \displaystyle\int_0^{\theta} ||(f(t)\vec{u}(t))'||dt = \int_0^{\theta}\sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt$ et $\dfrac{ds}{d\theta}(\theta) = \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

3. D'abord la fonction angulaire V est dérivable selon le théorème de relévement, et en dérivant la relation : $\tan(V(\theta)) = \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$, on obtient :
$V'(\theta)\left(1 + \tan^2(V(\theta))\right) = \dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)}$. D'où $V'(\theta) = \dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)} \times \dfrac{1}{1 + \frac{f^2(\theta)}{f'^2(\theta)}} = \dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}$

Par ailleurs (à la physicienne, que l'on justifie mathématiquement à l'aide de dérivée de composée), on a $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta} \times \left(\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)^{-1}$, or $\alpha = V + \theta$, donc $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = 1 + \left(\dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta) f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}\right)$, ainsi $\dfrac{d\alpha}{d\theta}(\theta) = \dfrac{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta) f''(\theta)}{(f^2(\theta) + f'^2(\theta))}$ et par suite : $R(\theta) = \dfrac{\left(f^2(\theta) + f'^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta) f''(\theta)}$.

4. On a $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, donc les coordonnées de M dans le repère mobile $(M, \overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))$ sont $\left(\cos\left(V + \dfrac{\pi}{2}\right), \sin\left(V + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ $(-\sin V, \cos V)$ où V désigne l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{T}}\right)$.

B - Retour à l'arc γ_1

1. L'arc γ_1 privé de son pôle O est décrit lorsque θ parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi[$, il est un arc birégulier. Commençons par déterminer l'abscisse curviligne orienté d'origine $\theta = 0$, puis la normale et le rayon de courbure :

- $s(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt = \int_0^\theta \sqrt{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $s'(\theta) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
- Vecteur tangent et normal : On a $\overrightarrow{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))} =$ $\begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))}$,

  Ainsi $V = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha = V + \theta = \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -\sin V \\ \cos V \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))}$
- Rayon de courbure : $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{d\alpha} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
- Enfin $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))} + \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))}$,

  d'où
  $\overrightarrow{OI}(\theta) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + \cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 + \cos\theta(1 - \cos\theta) \\ \sin\theta(1 - \cos\theta) \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}$

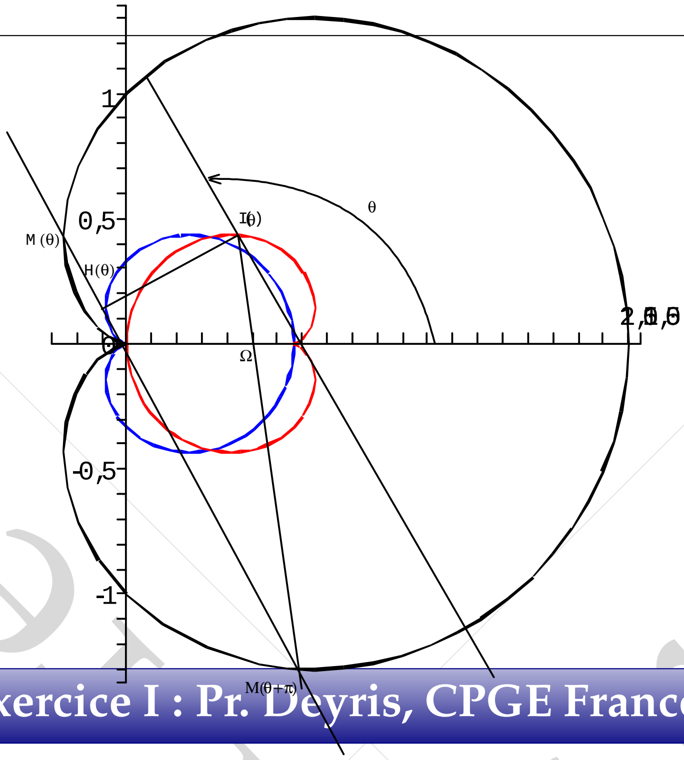
2. On a $\overrightarrow{OM}(\theta + \pi) = \begin{pmatrix} -\cos\theta(1 - \cos\theta) \\ -\sin\theta(1 - \cos\theta) \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}$, alors le rapport de cette homothétie est $\lambda = -\dfrac{1}{3}$. Si $\Omega = (a, b)$ désigne les coordonées de son centre dans le repère fixe $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, alors on aura $\overrightarrow{\Omega I}(\theta) = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}(\theta + \pi)$, donc $\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OI}(\theta) = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega O} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}(\theta + \pi)$, en identifiant les coordonnées, en obtient $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$. Ainsi le centre de cette homothétie est : $\Omega = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

3. On a $\overrightarrow{OI}(\theta) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 + \cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{v}(\theta))}$, donc $\overrightarrow{OH}(\theta) = \dfrac{1}{3}(1 + \cos\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$. Ainsi $H(\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.

4. Voir figure ci-dessous (Merci Maple) : En noir la cardioïde γ_1, en rouge sa développée γ_I et en bleu la courbe γ_H. (Attention Daltoniens ...)

5. Puisque γ_H se déduit de γ_1 par homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$, alors selon I-(6) et I-(7) , on a :

   $l(\gamma_H) = \dfrac{1}{3}l(\gamma_1) = \dfrac{8}{3}$ et Aire$(\gamma_H) = \dfrac{1}{3}$Aire$(\gamma_1) = \dfrac{\pi}{2}$



Corrigé Exercice I : Pr. Deyris, CPGE France

1a) La fonction f est un polynôme en x et y, donc est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^2$.

1b) On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 3{x_0}^2 - 3(1 + {y_0}^2)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -6x_0 y_0$.

1c) C'est immédiat.

1d) On a, pour tout $(h,k) \in \mathbf{R}^2$: $f(1+h,k) = (1+3h+3h^2+h^3) - 3(1+h)(1+k^2) = -2+3h^2-3k^2+h^3-3hk^2$.
Prenons pour norme sur $\mathbf{R}^2$ la norme définie par $\|(x,y)\| = \max\{|x|,|y|\}$ (les normes sur $\mathbf{R}^2$ étant toutes équivalentes, le choix de la norme n'influe pas sur le résultat). On a alors, pour tout $(h,k) \in \mathbf{R}^2$, $|h| \leq \|(h,k)\|$ et donc $|h^3| \leq \|(h,k)\|^3 = o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$; de même, $hk^2 = o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$. Par suite, toujours au voisinage de $(0,0)$:

$$f(1+h,k) = -2 + 3(h^2-k^2) + o(\|(h,k)\|^2)$$

La forme quadratique $q : (h,k) \longmapsto 3(h^2-k^2)$ n'a pas un signe constant (par exemple $q(1,0) > 0$ et $q(0,1) < 0$) ; on sait qu'alors f ne présente pas d'extremum en $(1,0)$.

1e) De même, on a $f(-1+h,k) = 2 - 3(h^2-k^2) + o(\|(h,k)\|^2)$ au voisinage de $(0,0)$. Pour les mêmes raisons qu'en **1d)**, f ne présente pas d'extremum en $(-1,0)$.

1f) La fonction f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbf{R}^2$. On sait qu'alors, si elle présente un extremum local en un point, ce point est un point critique de f. Or on a vu que ses seuls points critiques sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, et que f n'y a pas d'extremum ; par suite f n'a pas d'extremum local.

2a) La fonction g, restriction de f à D, est continue sur D. De plus, D est un fermé de $\mathbf{R}^2$ (image réciproque du fermé $[0,1]$ par l'application continue $(x,y) \longmapsto x^2+y^2$), et est clairement borné ; c'est donc un compact de $\mathbf{R}^2$.
On sait que toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; donc g a un maximum A en un point de D, et un minimum a en un point de D.

2b) Supposons que A soit atteint en un point (x_0,y_0) de $D' = D \setminus C$. Alors la restriction de g à D' présenterait un maximum en (x_0,y_0). De plus, D' est un ouvert de $\mathbf{R}^2$ (c'est le disque unité ouvert) et g est C^1 sur D' ; donc (x_0,y_0) serait un point critique de g, donc de f.

Or on a vu que les seuls points critiques de f sont $(1,0)$ et $(-1,0)$, qui n'appartiennent pas à D' ; les extremums de g ne peuvent donc pas être atteints en un point de D', ils le sont donc forcément sur C.

2c) Pour tout $t \in \mathbf{R}$: $g(\cos t, \sin t) = \cos^3 t - 3\cos t(2-\cos^2 t) = 2\cos t(2\cos^2 t - 3)$.
Quand t décrit $\mathbf{R}$, $\cos t$ décrit $[-1,1]$. Étudions donc les variations de $\varphi : u \longmapsto 2u(2u^2-3)$ sur $[-1,1]$. On a, pour tout $u \in [-1,1]$, $\quad \varphi'(u) = 6(2u^2-1) \quad$ d'où le tableau de variations :

u	-1		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		1
$\varphi(u)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	-2

Puisque $(\cos t, \sin t)$ décrit C quand t décrit $\mathbf{R}$, et que $g(\cos t, \sin t) = \varphi(\cos t)$ pour tout t, le maximum de g sur C est atteint en chaque point $(\cos t, \sin t)$ pour lequel $\varphi(\cos t)$ est maximal, c'est à dire pour lequel $\cos t = -1/\sqrt{2}$. Par suite $A = 2\sqrt{2}$, et est atteint en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$.

2d) De même, $a = -2\sqrt{2}$ et est atteint en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(1/\sqrt{2}, -1\sqrt{2})$.

Corrigé Exercice II : Pr. Lemaire, CPGE France

1.

(a) Tout d'abord le théorème de Schwarz permet avec des fonctions de classe C^2 de confondre $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ avec $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

S'il existe a de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y)$ alors
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = a(x)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ d'où $f(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y)\ a(x)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

On en déduit que f vérifie $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, si f vérifie $(\mathcal{E})$ <u>et qu'elle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$</u>, considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)}$. On a g de classe C^1 par TG et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)f(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y)^2} = 0$, car f vérifie $(\mathcal{E})$. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert <u>convexe</u>, il existe une fonction a de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = a(x)$, soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y)$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{On a bien l'équivalence}}$

(b) Soit f solution de $(\mathcal{E})$ et ne s'anulant pas sur $\mathbb{R}$. On a donc l'existence du a et du 1.(a)

<u>Analyse</u> : Si on pose $f(x,y) = F(x)$ (y fixé), alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)f(x,y)$ s'écrit $F'(x) = ax(x)F(x)$, soit à l'aide des équations différentielles du 1er ordre linéaires : $F(x) = \lambda e^{A(x)}$ où A est une primitive de a.

<u>Synthèse</u> : Notons A une primitive de a sur $\mathbb{R}$ (qui existe car a est continue sur $\mathbb{R}$) et considérons g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f(x,y)e^{-A(x)}$. Comme a est C^1 sur $\mathbb{R}$, A est C^2 sur $\mathbb{R}$ et donc g est a est C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Dérivons par rapport à x : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)e^{-A(x)} - f(x,y)a(x)e^{-A(x)} = 0$. Comme $\mathbb{R}^2$ est convexe, il existe une fonction ψ de

1 2 $A(x)$

classe C sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}$, $g(x,y) = \psi(y)$ et donc $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec $\varphi(x) = e$.

Comme on a $\psi(y) = f(x,y)e^{-A(x)}$, ψ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ par TG et ne s'anunle pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'anunlent pas sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement si $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ avec φ et ψ de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et ne s'anunlent pas sur $\mathbb{R}$, alors f est clairement C^2, ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$f(x,y)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(x)\psi(y)\varphi'(x)\psi'(y) - \varphi'(x)\psi(y)\varphi(x)\psi'(y) = 0.$

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\text{On a bien l'équivalence}}$

On n'a pas l'unicité car si (φ, ψ) convient alors $(2\varphi, \dfrac{1}{2}\psi)$ convient aussi !

(c) Si f vérifie $\mathcal{E}$ et ne s'annule pas alors il existe φ, ψ C^2 et ne s'annulant pas tel que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$f(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$, donc $f(x,0) = \varphi(x)\psi(0)$ et $f(0,y) = \varphi(0)\psi(y)$.

Posons alors $\varphi_0(x) = g(x)$, $\psi_0(y) = \lambda h(y)$ et $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi_0(x)\psi_0(y)$, donc

$f(x,0) = \varphi_0(x)\psi_0(0) = g(x)\lambda h(0)$ et $f(0,y) = \varphi_0(0)\psi_0(y) = g(0)\lambda h(y)$. Comme $g(0) = h(0)$, $\lambda = \dfrac{1}{g(0)}$ convient et

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x)\ \frac{h(y)}{g(0)}$$

Pour l'unicité si f_1 et f_2 sont 2 telles fonctions, on a $f_1(x,y) = \varphi_1(x)\psi_1(y)$, et $f_2(x,y) = \varphi_2(x)\psi_2(y)$, d'où

$f_1(x,0) = \varphi_1(x)\psi_1(0) = f_2(x,0) = \varphi_2(x)\psi_2(0) = g(x)$ et

$f_1(0,y) = \varphi_1(0)\psi_1(y) = f_2(0,y) = \varphi_2(0)\psi_2(y) = h(y)$ d'où il existe 2 réels α et β tels que $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$ et $\psi_2 = \beta\psi_1$

On en déduit que $f_1(0,0) = f_2(0,0) = \varphi_1(0)\psi_1(0) = \alpha\beta\varphi_1(0)\psi_1(0) = g(0)$ $(= h(0))$ comme tout est non nul, on a donc $\alpha\beta = 1$ et donc $f_1 = f_2$ et l'on a l'unicité.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = g(x)\ \dfrac{h(y)}{g(0)} \text{ convient et est unique}}$

2.

(a) Petite erreur d'énoncé : lire $y \longmapsto f(x_0, y)$ et non $y \longmapsto f(x, y_0)$.

Soit (x_0, y_0) un maximum local de f. Soit $r > 0$ tel que $\forall (x, y) \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$, $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ et donc $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$, $f(x, y_0) \leqslant f(x_0, y_0)$ d'où x_0 est un maximum local de $x \longmapsto f(x, y_0)$. On fait de même pour $y \longmapsto f(x_0, y)$ qui admet un maximum local en y_0.

Réciproquement soient x_0 un maximum local de $x \longmapsto f(x, y_0)$ et y_0 un maximum local de $y \longmapsto f(x_0, y)$.

Il existe φ et ψ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$. Comme f ne s'annule pas, φ et ψ non plus. Par valeurs intermédiaires elles ne changent donc pas de signe. Quitte à changer φ en $-\varphi$ et ψ en et $-\psi$, on peut supposer que $\varphi > 0$ et comme f est positive, on en déduit que ψ aussi.

D'autre part, $\varphi(x) = \dfrac{f(x, y_0)}{\psi(y_0)}$, donc φ admet un maximum en x_0. De même ψ admet un maximum en y_0. On a donc l'existence d'un $r > 0$ tel que $\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$ et $\forall x \in [y_0 - r, y_0 + r]$ $\psi(y) \leqslant \psi(y_0)$ et

Comme tout est strictement positif, on en déduit que

$\forall x \in [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r]$ $f(x, y) = \varphi(x)\psi(x) \leqslant \varphi(x_0)\psi(y_0) = f(x_0, y_0)$.

Conclusion :

$\boxed{f \text{ admet un maximum local en } (x_0, y_0) \text{ SSI } x_0 \text{ est un max. local de } x \longmapsto f(x, y_0) \text{ et } y_0 \text{ un max. local de } y \longmapsto f(x_0, y).}$

(b) Soit $A = \{x_0 \in \mathbb{R}$ tel que x_0 soit un maximum de $x \longmapsto f(x, y_0)\}$ et $B = \{y_0 \in \mathbb{R}$ tel que y_0 soit un maximum de $y \longmapsto f(x_0, y)\}$. On a alors

Conclusion : $\boxed{A \times B = \{(x_0, y_0) \text{ tel que } f \text{ admet un maximum local en } (x_0, y_0)\ \}}$

3.

(a) Considérons h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = t^3 + |t|^3$. On a donc

$$h(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 2t^3 \text{ si } t \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{d'où } h'(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 6t^2 \text{ si } t > 0 \end{cases} \quad \text{et } h''(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 12t \text{ si } t > 0 \end{cases}$$

Les limites de h, h' et h'' à gauche et à droite en 0 sont toutes égales à 0. Par le théorème de prolongement des fonctions de classe C^k, h est donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On en déduit par TG que f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$ ($f(x, y) = h(xy)$).

(b) On a $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yh'(xy)$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xh'(xy)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = h'(xy) + xyh''(xy)$

$$f(x, y)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = h(xy)\ h'(xy) + xyh''(xy) - yh'(xy)xh'(xy) = \begin{cases} 0 \text{ si } xy < 0 \\ 36x^5y^5 - 36x^5y^5 - = 0 \text{ si } xy \geqslant 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ vérifie } (\mathcal{E})}$

(c) Supposons qu'il existe φ et ψ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$ $f(1, 1) = \varphi(1)\psi(1) = 2$ donc $\varphi(1) \neq 0$ et $\psi(1) \neq 0$, $f(-1, -1) = \varphi(-1)\psi(-1) = 2$ donc $\varphi(-1) \neq 0$ et $\psi(-1) \neq 0$ et enfin $f(-1, 1) = \varphi(-1)\psi(1) \neq 0$ or $f(-1, 1) = 0$ car $(-1, 1)$ est dans la zone $xy < 0$: Absurde !

Conclusion : $\boxed{\text{Il n'existe pas } \varphi \text{ et } \psi \text{ telles que } \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)}$