CPGE My Youssef, Rabat

Contrôle 4 (2009-2010): *Formes quadratriques Coniques et Quadriques*

Samedi 9 Décembre 2009

Durée : 2 heures

Blague du jour :
Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?
- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon

Personnalité du jour ***Hadamard***
Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) est un mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale suprieure. C'est Emile Picard qui y dirigea ses travaux de recherches.
Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) **de la façon suivante :** $H_1 = (1), H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ **et** $H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$**. Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.**

Source : Banque Filière PT, 2007, Maths B.

Corrigé par Mr Laurent Chéno, Prépas du lycée Dorian, Paris 11ème

---

Partie I

Question I.1

I.1.a On reconnaît une équation réduite d'un cône à base elliptique de sommet O.

I.1.b Si $\alpha = 0$, l'intersection est réduite au point O. Si $\alpha \neq 0$, on reconnaît une ellipse centrée en $\Omega(0,0,\alpha)$, de grand axe dirigé par $\vec{\imath}$ et de petit axe dirigé par $\vec{\jmath}$.
L'ellipse obtenue pour $\alpha = 1$ a pour équation $x^2 + 2y^2 = 1$, ses sommets sont $(1,0,1)$ et $(-1,0,1)$ sur le grand axe et $(0, 1/\sqrt{2}, 1)$ et $(0, -1/\sqrt{2}, 1)$ sur le petit axe.

.

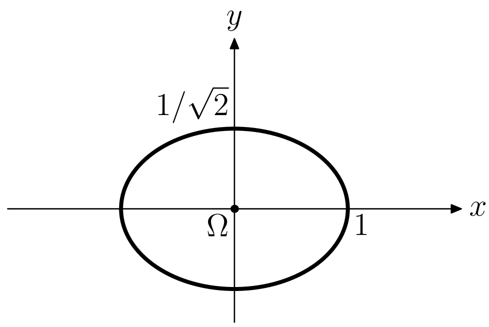

Figure 1 l'ellipse obtenue pour $\alpha = 1$

I.1.c Si $\alpha = 0$, on reconnaît la réunion de deux droites sécantes : $\begin{cases} x = 0 \\ z = y\sqrt{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ z = -y\sqrt{2} \end{cases}$.
Si $\alpha \neq 0$, on reconnaît dans l'équation $z^2 - 2y^2 = \alpha^2$ celle d'une hyperbole centrée en $\Omega(\alpha, 0, 0)$, son axe focal est parallèle à l'axe des z.
Si $\alpha = 1$, ses sommets sont les points $(1, 0, \pm 1)$, ses asymptotes ont pour équations (dans le plan $x = 1$, bien sûr) $z = \pm y\sqrt{2}$.

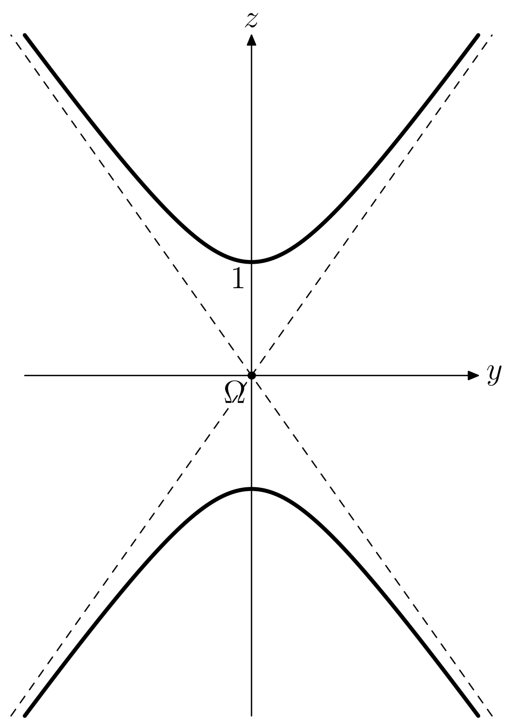

Figure 2 l'hyperbole obtenue pour $\alpha = 1$

Question I.2

I.2.a Bien sûr, $(x + z)^2 - (x - z)^2 = 4xz$.

I.2.b On en déduit que $q(x, y, z) = y^2 + \left(\dfrac{x + z}{\sqrt{2}}\right) - \left(\dfrac{x - z}{\sqrt{2}}\right)$.

I.2.c Posant $X = \dfrac{x + z}{\sqrt{2}}$, $Y = y$ et $Z = \dfrac{x - z}{\sqrt{2}}$, on a bien $q(x, y, z) = X^2 + Y^2 - Z^2$, qui est de la forme requise avec $a = b = 1$. La transformation ϕ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$: on vérifie qu'il s'agit bien d'une matrice orthogonale. Elle est symétrique, et de trace égale à 1 : l'application ϕ est donc une réflexion.

Question I.3

À l'aide de la transformation précédente, l'équation de S_1 devient, dans la nouvelle base : $X^2+Y^2-Z^2-\sqrt{2}(X+Z)=0$, ce qui peut encore se réécrire $(X-\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2+Y^2-(Z+\dfrac{1}{\sqrt{2}})^2=0$.

On reconnaît un cône de révolution dont l'axe est dirigé par l'axe des Z. Son sommet (qui est aussi le centre) a pour coordonnées $X=1/\sqrt{2}$, $Y=0$ et $Z=-1/\sqrt{2}$ ou encore, dans le repère initial : $(x,y,z)=(0,0,1)$. (On aurait pu le trouver aussi à l'aide d'un gradient.)

Question I.4

$\mathcal{P}_1$ a pour équation (dans le plan xOy) : $y^2=2x$, il s'agit donc d'une parabole d'axe Oy et de sommet O.

Question I.5

Notons $B(1,1,1)$ le sommet du cône. Un point courant P_t de $\mathcal{P}_1$ a pour coordonnées $(t^2/2,t,0)$, donc un point générique $M(t,\lambda)$ du cône $\mathcal{C}_1$ vérifie $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BP_t}$ ou encore $\begin{cases} x=1+\lambda(t^2/2-1)\\ y=1+\lambda(t-1)\\ z=1-\lambda\end{cases}$ et il n'est pas difficile d'éliminer les paramètres t et λ pour obtenir une équation cartésienne du cône $\mathcal{C}_1$: $2\dfrac{x-z}{1-z}=\left(\dfrac{y-z}{1-z}\right)^2$ ou, si l'on préfère : $2(x-z)(1-z)=(y-z)^2$.

Question I.6

On procède comme précédemment, obtenant d'abord une paramétrisation du cône $\mathcal{C}_A$ sous la forme $\begin{cases} x=x_A+\lambda(t^2/2-x_A)\\ y=y_A+\lambda(t-y_A)\\ z=z_A-\lambda z_A\end{cases}$ puis éliminant tour à tour $\lambda=1-z/z_A$ et t. Finalement, on obtient l'équation cartésienne suivante :

$$\mathcal{C}_A:\quad 2(x-x_A\frac{z}{z_A})(1-\frac{z}{z_A})=\left(y-y_A\frac{z}{z_A}\right)^2.$$

Le point B est sur $\mathcal{C}_A$ si et seulement si $2(z_A-x_A)(z_A-1)=(z_A-y_A)^2$. On remarque que cela signifie que A est sur le cône $\mathcal{C}_1$.

Soit Σ l'ensemble des sommets A des cônes contenant $\mathcal{P}_1$ et B : si $z_A\neq 0$, on vient de dire que A doit être sur le cône $\mathcal{C}_1$; si $z_A=0$, le cône de sommet A qui contient $\mathcal{P}_1$ est en réalité le plan xOy, qui ne passe pas par B. Finalement Σ est l'ensemble des points du cône $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas dans le plan xOy, c'est-à-dire exactement : $\Sigma=\mathcal{C}_1\setminus\mathcal{P}_1$.

Partie II

Question II.1

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des paraboloïdes de révolution d'axe Oz et de sommet O. Le plan xOy est tangent au sommet de ces deux paraboloïdes : $\mathcal{P}$ est du côté des $z\geqslant 0$ et $\mathcal{Q}$ du côté des $z\leqslant 0$.
$\mathcal{P}$ est plus évasé que $\mathcal{Q}$.

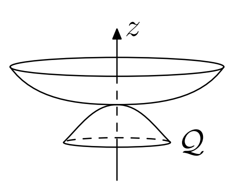

Figure 3 schéma présentant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$

Question II.2

La méridienne contenue dans le plan xOz a pour équation $x^2=8z$: c'est une parabole d'axe Oz et de sommet O. La surface étant de révolution autour de Oz, il en est de même de toutes les méridiennes.
La méridienne choisie passe par le point $(a,0,a^2/8)$: un vecteur tangent en ce point est $(1,0,a/4)$. Une équation de la tangente (dans le plan xOz) est donc $a(x-a)=4(z-a^2/8)$. Cette tangente coupe le plan $z=0$ au point $(a/2,0,0)$.

Soit M' la méridienne de Q contenue dans le plan xOz : c'est une parabole d'équation $x = -2z$.
Or une droite passant par $(a/2, 0, 0)$ avec $a > 0$ est

- ▷ tangente à M' en O si sa pente est nulle ;
- ▷ tangente à M' en un point d'abscisse positive si sa pente est égale à une certaine valeur $p < 0$;
- ▷ d'intersection vide avec M' si sa pente est dans l'intervalle $]p, 0[$;
- ▷ d'intersection avec M' réduite au point $(a/2, 0, -a^2/8)$ si elle est verticale ;
- ▷ d'intersection avec M' réduite à un point si sa pente est dans l'intervalle $]-\infty, p[$;
- ▷ sécante avec M' en deux points distincts si sa pente est strictement positive.

Nous sommes ici dans le dernier cas.
L'ensemble de la figure étant de révolution autour de Oz, la propriété est également valable pour toute les tangentes à n'importe quelle méridienne de $\mathcal{P}$, à l'exception bien sûr des tangentes au point O (qui sont horizontales).

Question II.3
La base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ s'obtient à partir de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ par une rotation d'angle θ autour de Oz, rotation qui conserve $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Autrement dit, les équations cartésiennes de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans le nouveau repère sont les mêmes que dans l'ancien.

Question II.4
Comme $x^2 + y^2 = r^2$, on a simplement $z = \dfrac{r^2}{8}$ comme équation paramétrique de $\mathcal{P}$ en coordonnées cylindriques.

Question II.5
Il suffit de vérifier que les coordonnées du point courant de $\mathcal{C}$ vérifient l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Fin
À la prochaine