Devoir Libre

13 Courbes & Surfaces

Blague du jour

☛ Qu'est ce qu'un taureau avec un sac à main ?
- Un vache folle
☛ Qu'ce qu'est un oiseau migrateur ?
- C'est un oiseau qui se gratte que d'un côté.
☛ Qu'est-ce qu'on obtient si on croise un pitbull et un yorkshire ?
- Un yorkshire mort...

Joseph Liouville (1809-1882)

Mathématicien français. Diplômé de l'École Polytechnique et de l'École des ponts et chaussées, il préfère suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie. Il fut le premier à reconnaitre les travaux inédits d'Évariste Galois

Mathématicien du jour

Énoncé : e3a 2009, PSI

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \qquad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

① On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

i Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x-1)^2 + (2y)^2 = 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

ii Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par h, c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

b Soit $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Étudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2, c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \text{avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

c Soit $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t))$.
Étudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3, c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t)\sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$: $(2x)^2 + (1-2y^2)^2 = 1$.

② On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a Soit $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2.

b Soit $\Gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array} \right.\right\}$.
Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

c Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1.
De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2.
En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ.

d Déterminer un paramétrage de Γ, en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ.
En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ.

e Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

f Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz, en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

Fin

Á la prochaine

✉ : mamouni.myismail@gmail.com