

Devoir Libre

13 Courbes & Surfaces

Blague du jour

- ☛ Qu'est ce qu'un taureau avec un sac à main ?  
- Un vache folle
- ☛ Qu'est ce qu'est un oiseau migrateur ?  
- C'est un oiseau qui se gratte que d'un côté.
- ☛ Qu'est-ce qu'on obtient si on croise un pitbull et un yorkshire ?  
- Un yorkshire mort...



Joseph Liouville (1809-1882)

Mathématicien français. Diplômé de l'École Polytechnique et de l'École des ponts et chaussées, il préfère suivre une carrière académique plutôt qu'une carrière d'ingénieur. Liouville publia dans divers domaines des mathématiques, dont la théorie des nombres, l'analyse complexe, la géométrie différentielle et la topologie différentielle, mais aussi la physique mathématique et même l'astronomie. Il fut le premier à reconnaître les travaux inédits d'Évariste Galois

Mathématicien du jour

Énoncé : e3a 2009, PSI

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1 = 1 - 2 \sin^2(t) \quad \sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t).$$

① On considère l'espace vectoriel réel usuel  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique  $\mathcal{B}$  soit orthonormale.

**a** Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par :  $h(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t))$ .

**i** Représenter la courbe  $C_1$  d'équation dans  $\mathcal{B}$  :  
 $(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1,$

et préciser la nature de cette courbe.

**ii** Comparer  $C_1$  avec la courbe paramétrée par  $h$ , c'est-à-dire :

$$\{(\cos^2(t), \cos(t) \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

**b** Soit  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$ .

Étudier et représenter la courbe  $C_2$  paramétrée par  $f_2$ , c'est-à-dire :

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer  $C_2$  avec la courbe d'équation dans  $\mathcal{B}$  :

$$x + y^2 = 1, \text{ avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

c Soit  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  avec  $f_3(t) = (\cos(t) \sin(t), \sin(t))$ .

Étudier et représenter la courbe  $C_3$  paramétrée par  $f_3$ , c'est-à-dire :

$$C_3 = \{(\cos(t) \sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que  $C_3$  est la courbe d'équation dans  $\mathcal{B} : (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1$ .

② On considère l'espace vectoriel réel usuel  $\mathbb{R}^3$  orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique  $\mathcal{C}$  soit orthonormale directe.

a Soit  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$  et  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Préciser la nature des deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$ .

b Soit  $\Gamma = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}$ .

Que représente  $\Gamma$  vis-à-vis de  $S_1$  et  $S_2$  ?

c Déterminer l'équation dans  $\mathcal{C}$  du plan tangent en tout point régulier  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $S_1$ .

De même déterminer l'équation dans  $\mathcal{C}$  du plan tangent en

tout point régulier  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  de  $S_2$ .

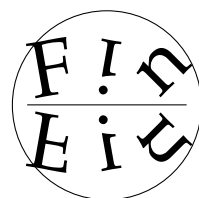
En déduire la tangente en tout point  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  régulier de  $\Gamma$ .

d Déterminer un paramétrage de  $\Gamma$ , en utilisant les coordonnées cylindriques : c'est-à-dire que l'on exprimera pour  $M = (x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$  les conditions sur  $r, \theta, z$  pour que  $M$  soit sur  $\Gamma$ .

En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet  $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$ , engendré par les droites passant par  $S$  et un point variable sur  $\Gamma$ .

e Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on pose :  $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t) \sin(t), \sin(t))$ . Soit  $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$ . Montrer que  $\gamma \subset \Gamma$ . Y-a-t-il égalité  $\gamma = \Gamma$  ?

f Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de  $\Gamma$  sur les plans  $xOy$ ,  $xOz$  et  $yOz$ , en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.



À la prochaine