.

Mamouni My Ismail

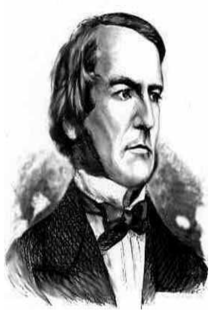
Corrigé Devoir Libre n°14 (Pr Chéno)

Coniques-Quadriques

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

3 amis sont au restaurant. Après leur repas, l'addition s'élève a 30 dhs. Ils donnent chacun 10 dhs. Le serveur s'aperçoit qu'il s 'est trompé dans les comptes et qu'en fait ils ne doivent payer que 25 dhs.
Comme 5 dhs n'est pas divisible en 3, il décide de garder 2 dhs de pourboire et de leur rendre le reste. Ainsi les amis se partagent les 3 dhs et ils ont donc payé le repas 3 fois 9dhs = 27 dhs plus les 2 dhs du serveur, cela donne 29 dhs !
Où est passé le dernier dh ?



George Boole (1815-1864)

Mathématicien du jour

Logicien, mathématicien et philosophe britannique. Il est le créateur de la logique moderne, que l'on appelle algèbre de Boole en son honneur.
Autodidacte, il publia ses premiers travaux tout en exerçant son métier d'instituteur et de directeur d'école primaire. En effet, issu d'une famille pauvre, George Boole n'a pas les moyens financiers d'aller l'université, il fût obligé de travailler pour soutenir sa famille, il devient enseignant à 16 ans. Quatre ans plus tard, il fonde et dirige sa propre école. Ses travaux lui valurent la Royal Medal de la Royal Society.
Il épouse Mary Everest, nièce de Sir George Everest, le responsable de la mission cartographique qui baptisa le mont Everest.

Partie I

Question I.1
Notons (x', y') les nouvelles coordonnées. On a $x = x' - 3$ e t$y = y' - 2$ de sorte que l'équation de (C) devient

$$(y'-2)^2 - \sqrt{3}(x'-3)(y'-2) - 2\sqrt{3}(x'-3) + (4-3\sqrt{3})(y'-2) + 6 - 6\sqrt{3} = 0 \iff y'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0.$$

Autrement dit, O' est le centre de la conique (C).

Question I.2
A est bien sûr la matrice de la forme quadratique associée à la conique.
I.2.a On trouve $\chi_A(X) = X^2 - X - \dfrac{3}{4}$ et les valeurs propres de A sont donc $\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$. On peut choisir comme base orthonormée directe de diagonalisation la base $(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u}(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ et $\vec{v}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2})$, c'est-à-dire la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ qu'on a fait tourner de $-\dfrac{\pi}{3}$. L'isométrie qui transforme le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ en $(O'; \vec{u}, \vec{v})$ est la composée de cette rotation de centre O et de la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$.
Dans le nouveau repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$, en notant (X, Y) les coordonnées, l'équation de (C) se transforme en

$$\frac{1}{2}(3X^2 - Y^2) + 2 = 0 \iff \frac{Y^2}{4} - \frac{X^2}{4/3} = 1.$$

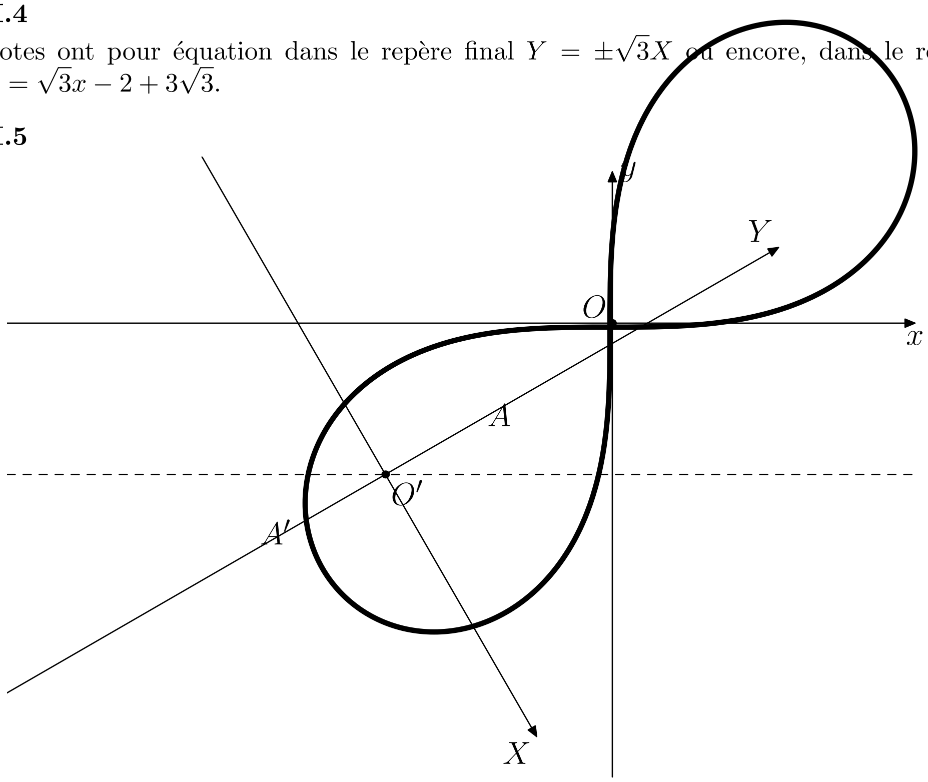
Le changement de coordonnées s'écrit $\begin{cases} x = \dfrac{X + Y\sqrt{3}}{2} - 3 \\ y = \dfrac{-X\sqrt{3} + Y}{2} - 2 \end{cases}$

(C) est donc une hyperbole équilatère d'axe focal $(O', \vec{v})$.

Question I.3
Les sommets A et A' ont pour coordonnées $X = 0$ et $Y = \pm 2$ ou encore, dans le repère de départ, $A(-3+\sqrt{3}, -1)$ et $A'(-3-\sqrt{3}, -3)$.

Question I.4
Les asymptotes ont pour équation dans le repère final $Y = \pm\sqrt{3}X$ ou encore, dans le repère initial, $y = -2$ et $y = \sqrt{3}x - 2 + 3\sqrt{3}$.

Question I.5



Partie II

Question II.1
$\rho(\theta)$ est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, et tous les $[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ pour k entier.

Question II.2
Les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine. En outre $M(\theta)$ et $M(\frac{\pi}{2} - \theta)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes. On restreint l'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Question II.3
Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ la fonction ρ croît de 0 à 1.

Question II.4
La courbe coupe $(x'x)$ uniquement au point O puisque $\rho(0) = \rho(\pi) = 0$. La tangente à la courbe est alors dirigée par le vecteur unitaire d'angle polaire θ : elle est bien horizontale.

Question II.5
Pour $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$, la tangente est dirigée par le vecteur $\vec{M}'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u} + \rho(\theta)\vec{v}$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle.
On trouve que $\vec{M}' = \dfrac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}\vec{u} + \sqrt{\sin 2\theta}\vec{v}$, colinéaire à $\vec{T} = \cos 2\theta\vec{u} + \sin 2\theta\vec{v}$, donc $\widehat{\vec{u}, \vec{T}} = 2\theta$ et $\widehat{\vec{\imath}, \vec{T}} = 3\theta$.
Ainsi $\vec{T}(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$ dans le repère initial.
La tangente a donc pour équation $\sin 3\theta(x - \sqrt{\sin 2\theta}\cos\theta) = \cos 3\theta(y - \sqrt{\sin 2\theta}\sin\theta)$ ou encore

$$x\sin 3\theta - y\cos 3\theta = (\sin 2\theta)^{3/2}.$$

Question II.6 Voir figure ci dessus

Partie III

Question III.1
Si $M = \Omega$, il n'y a aucun point M' répondant à la question, puisque $R > 0$.
Si $M \neq \Omega$, l'alignement impose de chercher M' sous la forme $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$ et on trouve alors une seule solution $k = \dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$ ou encore $M' = \Omega + \dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}\overrightarrow{\Omega M}$.

Question III.2
Par définition de ϕ, il s'agit d'une involution : $M' = \phi(M) \iff M = \phi(M')$. Autrement dit : $\phi^{-1} = \phi$.

Question III.3
L'image du cercle de centre Ω et de rayon R est égale à ce cercle lui-même, puisqu'il est défini par $\overrightarrow{\Omega M}^2 = R^2$.

Question III.4
L'image du cercle de centre Ω et de rayon $0 < r \neq R$ est le cercle de centre O et de rayon R^2/r.

Question III.5
Soit D une droite passant par Ω, il faut retirer le point Ω qui n'a pas d'image par ϕ et étudier l'image de $D' = D \setminus \{\Omega\}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur unitaire dirigeant D.
Un point $M \in D'$ vérifie $\Omega M = k\vec{u}$, où $k \neq 0$. Son image est alors le point M' défini par $\Omega M' = \dfrac{R^2}{k}\vec{u}$.
Or, quand k décrit $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{R^2}{k}$ décrit également $\mathbb{R}^*$. Cela signifie que $\phi(D') = D'$.

Question III.6
On a déjà dit que $\lambda = \dfrac{R^2}{\|\Omega M\|^2}$.
Alors, en complexes : $z' - z_\Omega = \lambda(z - z_\Omega)$ donc

$$z' = z_\Omega + \frac{R^2}{|z - z_\Omega|^2}(z - z_\omega) = z_\Omega + \frac{R^2}{(z - z_\Omega)(\overline{z - z_\Omega})}(z - z_\Omega) = z_\Omega + \frac{R^2}{\overline{z - z_\Omega}}.$$

Question III.7
Ici on a donc $z' = 1 + \dfrac{1}{\bar{z} - 1}$.
$z = \dfrac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) = \dfrac{e^{i\theta/2}}{2}(e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}) = \cos\dfrac{\theta}{2}e^{i\theta/2}$ est de module $\cos\dfrac{\theta}{2}$ et d'argument $\dfrac{\theta}{2}$ si on choisit $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, ce qui est toujours possible.

$M(\theta) \neq \Omega \iff e^{i\theta} \neq 1 \iff \theta \neq 0$ (modulo 2π).

Quand $z = \dfrac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) \neq 1$ on obtient donc

$$z' = 1 + \frac{2}{e^{-i\theta} - 1} = \frac{e^{-i\theta} + 1}{e^{-i\theta} - 1} = -\frac{e^{i\theta/2} + e^{-i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{i\theta/2}} = i\text{cotan}\frac{\theta}{2},$$

il s'agit bien sûr d'un imaginaire pur.

Quand θ décrit $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$, $M(\theta)$ décrit exactement le cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω. Le point $M'(\theta) = \phi(M(\theta))$ décrit alors, d'après ce qu'on vient de voir, l'axe des ordonnées.

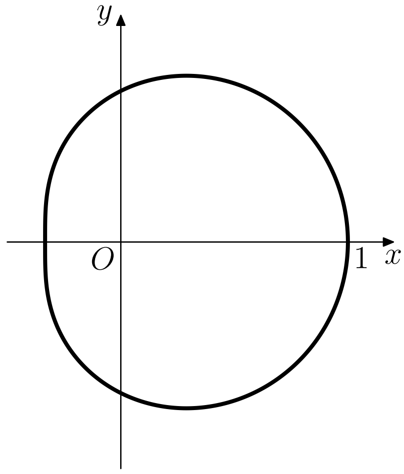
Comme ϕ est involutive, l'image de l'axe des ordonnées est égale au cercle de diamètre $[O\Omega]$ privé de Ω.

Question III.8
Avec les notations traditionnelles, l'équation réduite de l'ellipse s'écrit $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ donc $a = 2$ et $b = \sqrt{3}$.
Alors $c = \sqrt{4 - 3} = 1$ et les foyers sont $F(1, 0)$ et $F'(-1, 0)$. L'excentricité vaut $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$.

La représentation polaire dans un repère centré au foyer est une question de cours !

Si $(\vec{u}, \vec{v})$ est la base tournante habituelle, le point générique de l'ellipse est $M(\theta) = F + \rho(\theta)\vec{u}$, donc $M'(\theta) = \phi(M(\theta)) = F + \dfrac{R^2}{\rho(\theta)}\vec{u}$. Autrement dit, l'image de l'ellipse est la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{2+\cos\theta}{3}$.

Le tracé n'en est pas demandé, on le trouvera néanmoins ci-dessous.



Question III.9

Pour $\theta \in]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$, le point de (H) d'angle polaire θ a pour coordonnées $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ et vérifie

$xy = \rho^2 \cos\theta \sin\theta = 1$ donc $\rho^2 = \dfrac{2}{\sin 2\theta}$ et $\rho = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}$

, ce qui est une équation polaire de (H).

Alors le même raisonnement qu'en III.8 montre que la courbe $\phi(H)$ est d'équation polaire

$$\rho = \frac{R^2}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2\theta}}} = \frac{\sqrt{\sin 2\theta}}{\sqrt{2}}.$$

On reconnaît la courbe étudiée au II, privée de l'origine, et transformée par l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie IV

Question IV.1

Le point courant P de la droite (SM) est de coordonnées $x = x_0 + t(x_M - x_0)$, $y = ty_M$ et $z = z_0 + t(z_M - z_0)$.

Question IV.2

Notons (X, Y, Z) les coordonnées de M dans le repère d'origine S : $X = x_M - x_0$, $Y = y_M$ et $Z = z_M - z_0$.
Alors P est de coordonnées (tX, tY, tZ).
L'intersection de la droite (SM) avec le plan $z = 0$ ou $Z = -z_0$ doit être sur l'ellipse. Or il s'agit du point P de paramètre $t = -\dfrac{z_0}{z_M - z_0} = -\dfrac{z_0}{Z}$ donc de coordonnées $(\dfrac{x_0 Z - X z_0}{Z}, -\dfrac{Y z_0}{Z}, 0)$. M est sur le cône si et seulement si P est sur l'ellipse. On obtient ainsi une équation du cône :
$\dfrac{(\frac{x_0 Z - X z_0}{Z})^2}{4} + (\dfrac{Y z_0}{Z})^2 = 1$ ou encore, en simplifiant, $\dfrac{(x_0 Z - z_0 X)^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0$.

Question IV.3

En développant l'équation du cône trouvée précédemment, on vérifie que A est la matrice de la forme quadratique associée.

IV.3.a Son polynôme caractéristique est $\chi_A = (z_0^2 - X)\left(X^2 - \dfrac{x_0^2 + z_0^2 - 4}{4}X - \dfrac{z_0^2}{4}\right)$.

IV.3.b A est symétrique donc diagonalise dans une base orthonormée.

IV.3.c Le discriminant de P vaut $\Delta = 4z_0^2 + \dfrac{(x_0^2 + z_0^2 - 4)^2}{16} \geqslant 4z_0^2 > 0$ car on a supposé $z_0 \neq 0$.

IV.3.d $\chi_A(X) = (z_0^2 - X)P(X)$. Comme P n'a pas de racine double, pour que χ_A admette une racine double, il est nécessaire que ce soit z_0^2, et donc que z_0^2 soit racine de P.

Question IV.4

Comme $P(z_0^2) = \dfrac{z_0^2}{4}(3 - x_0^2 + 3z_0^2)$, et qu'on a supposé $z_0 \neq 0$, le cône est de révolution si et seulement si $x_0^2 - 3z_0^2 = 3$, c'est-à-dire si et seulement si S se trouve sur l'hyperbole du plan (xOz) d'équation $\dfrac{x^2}{3} - z^2 = 1$.

À la prochaine