Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°21 (Pr. Chabchi)

Courbes
Une cardioïde et sa développée

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

Bonjour, vous avez rejoint la messagerie vocale d'aide psychiatrique.
- Si vous êtes dépressif, le numéro sur lequel vous appuierez est sans importance, personne ne répondra.
- Si vous êtes un compulsif à la répétition, raccrochez et recomposez.
- Si vous êtes un agressif-passif, mettez-nous en attente.
- Si vous êtes antisocial, arrachez le téléphone du mur.
- Si vous avez des difficultés d'attention, ne vous occupez pas des instructions.

Charif Al Idrissi (1100-1165)

Mathématicien du jour

géographe et botaniste almoravides, né à Ceuta, de son nom complet Abu Abdallah Muhammad Ibn Muhammad Ibn Abdallah Ibn Idriss al-Qurtubi al-Hassani. Il doit sa renommée à la rédaction d'un ouvrage de géographie descriptive intitulé Kitâb Nuzhat al Mushtâq ou Kitâb Rudjâr. Le roi normand Roger II de Sicile l'aurait appelé à sa cour pour y réaliser un grand planisphère en argent (voir image). En matière de plantes médicinales, son Kitab al-Jami-li-Sifat Ashtat al-Nabatat (Livre rassemblant les descriptions fragmentaires des plantes) témoigne de ses connaissances approfondies en botanique.

PARTIE I

1. .

   (a) Le domaine de définition de ρ est $\mathbb{R}$ et ρ est $2\pi-$périodique.

   (b) Par parité de la fonction cosinus, ρ est aussi paire, donc l'arc γ_1 est symétrique par rapport à l'axe $\left(O\ \vec{\mathbf{i}}\right)$.

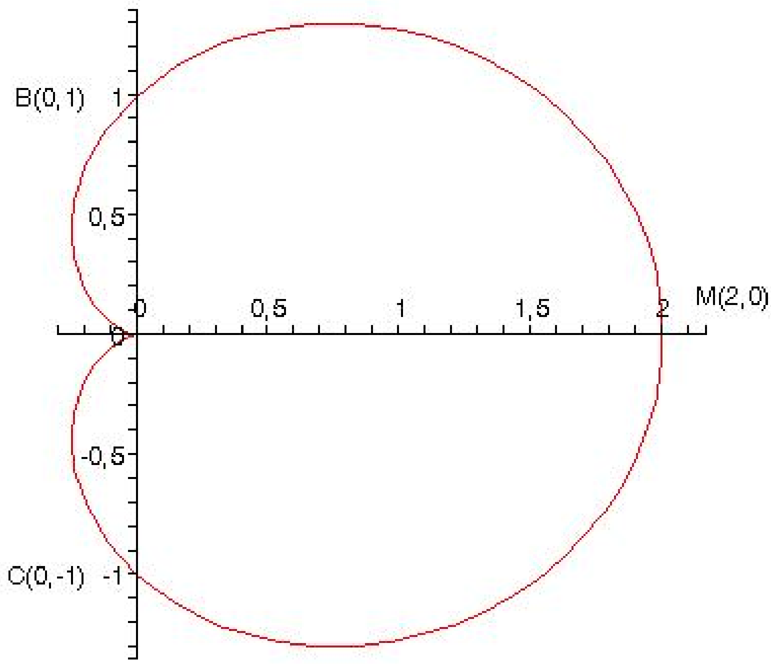
   (c) Le support de γ_1 est obtenu en prenant le support de γ_2 union son symétrique par rapport à l'axe $\left(O\ \vec{\mathbf{i}}\right)$.

2. Le pôle O est paramétré par $\theta = \pi$, de plus $\rho(\pi) = \rho'(\pi) = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos(\pi) = 1 \neq 0$. Puisque 2 est pair alors le pôle O est un point de rebroussement du premier espèce et la tangente est porté par $\vec{u}(\pi)$, càd horizontale.

3. Soit $M_0 = \phi(\theta_0)$ un point de γ_1 autre que le pôle O, donc $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ avec $\theta_0 \neq \pi$. On a alors
$\rho^2(\theta_0) + 2(\rho'(\theta_0))^2 - \rho(\theta_0)\rho''(\theta_0) = 3(1 + \cos(\theta_0)) > 0$. Ainsi la concavité de γ_1 en M_0 est tournée vers le pôle O (ou contient le pôle O) .

4. On a la fonction ρ est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\rho'(\theta) = -\sin(\theta) \leq 0$. Donc est décroissante sur $[0, \pi]$: elle décroit de la valeur $\rho(0)$ =2 à la valeur $\rho(\pi)$ =0.

5. Le tracé est ci-contre :



- La tangente à l'origine est horizontale
- Le point $M(2,0)$ est paramétré par $\theta = 0$, puisque $\rho(0) = 2 \neq 0$ et $\rho'(0) = 0$, la tangente est alors portée par $v(0) = \vec{j}$ càd verticale.
- Le point $B(0,1)$ est parmétré par $\theta = \frac{\pi}{2}$, puisque $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Si $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\widehat{\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right), \vec{T}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ désigne l'angle que le vecteur $\vec{u}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ avec le vecteur tangent, alors ici $\tan\left(V\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \dfrac{\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\rho'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1$, donc $V\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$. Dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ cette tangente a pour équation : $y = x + 1$
- Par symètrie, la tangente en $C(0,-1)$ dans $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ a pour équation : $y = -x - 1$.

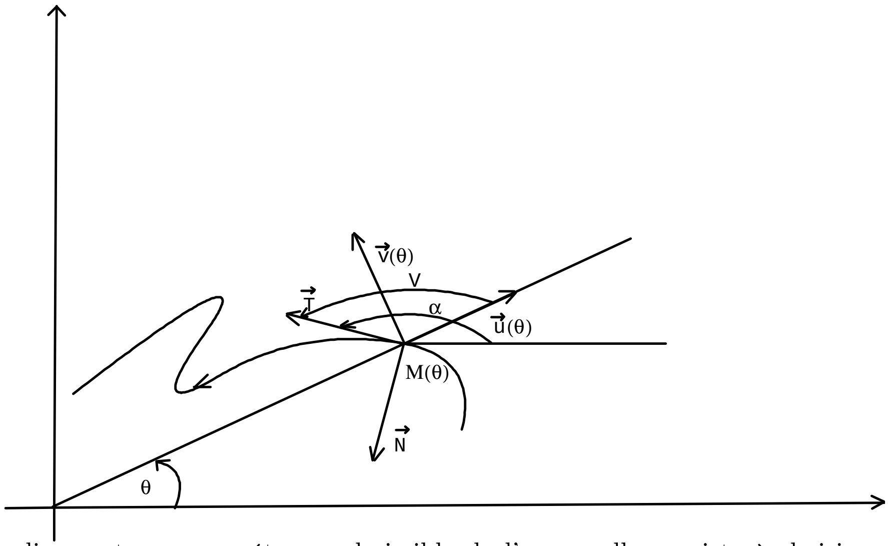
6. L'arc γ_1 étant de classe C^1, donc sa longueur $l(\gamma_1)$ est donnée par : $l(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta = 2\int_0^{\pi} ||\phi'(\theta)||d\theta$ par symétrie, donc
$$l(\gamma_1) = 2\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2(\theta) + (1+\cos(\theta))^2}d\theta = 2\int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos(\theta))}d\theta = 2\int_0^{\pi} 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)d\theta = 8$$

7. L'aire cherché est donnée par la formule de Green-Reimman en polaire: $\text{Aire}(\gamma_1) = \frac{1}{2}\int_{\overleftarrow{\partial\gamma_1}} \rho^2 d\theta$: il s'agit ic d'intégrale curviligne, où $\overleftarrow{\partial\gamma_1}$ désigne la fronière de γ_1 orienté dans le sens direct.
Donc $\text{Aire}(\gamma_1) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos(\theta) + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 2\pi = \frac{3\pi}{2}$.

PARTIE II

A- Questions de cours

1. Voir figure ci-contre : (permettez mes outils de dessin vectoriel modestes!)



2. L'abscisse curvuligne est un paramétrage admissible de l'arc γ, elle consiste à choisir une origine et de paramétrer chaque point par la longueur (algébrique) de l'arc joignant ce point à l'origine. dans ce cas la courbe est parcourue à vitesse uniforme valant 1.

   On choisit pour origine $\theta = 0$, et on oriente γ dans le sens des θ croissant. Alors $s(\theta) = \int_0^\theta \|(f(t)\vec{u}(t))'\|dt = \int_0^\theta \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt$ et $\dfrac{ds}{d\theta}(\theta) = \sqrt{f^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

3. D'abord la fonction angulaire V est dérivable selon le théorème de relévement, et en dérivant la relation : $\tan(V(\theta)) = \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$, on obtient :

   $V'(\theta)\left(1 + \tan^2(V(\theta))\right) = \dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)}$. D'où $V'(\theta) = \dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta)} \times \dfrac{1}{1 + \frac{f^2(\theta)}{f'^2(\theta)}} = \dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}$.

   Par ailleurs (à la physicienne, que l'on justifie mathématiquement à l'aide de dérivée de composée), on a $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta} \times \left(\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)^{-1}$, or $\alpha = V + \theta$, donc $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = 1 + \left(\dfrac{f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{f'^2(\theta) + f'^2(\theta)}\right)$, ainsi

   $\dfrac{d\alpha}{d\theta}(\theta) = \dfrac{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}{(f^2(\theta) + f'^2(\theta))}$ et par suite : $R(\theta) = \dfrac{\left(f^2(\theta) + f'^2(\theta)\right)^{\frac{3}{2}}}{f^2(\theta) + 2f'^2(\theta) - f(\theta)f''(\theta)}$.

4. On a $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, donc les coordonnées de M dans le repère mobile $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont $\left(\cos\left(V + \dfrac{\pi}{2}\right), \sin\left(V + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ $(-\sin V, \cos V)$ où V désigne l'angle $\left(\widehat{\vec{u}(\theta), \vec{T}}\right)$.

B - Retour à l'arc γ_1

1. L'arc γ_1 privé de son pôle O est décrit lorsque θ parcourt l'intervalle $]-\pi, \pi[$, il est un arc birégulier. Commençons par déterminer l'abscisse curviligne orienté d'origine $\theta = 0$, puis la normale et le rayon de courbure :

   - $s(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}dt = \int_0^\theta \sqrt{4\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt = 4\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $s'(\theta) = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$

   - Vecteur tangent et normal : On a $\vec{T} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{ds} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 1 + \cos\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\sin\dfrac{\theta}{2} \\ \cos\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))}$,

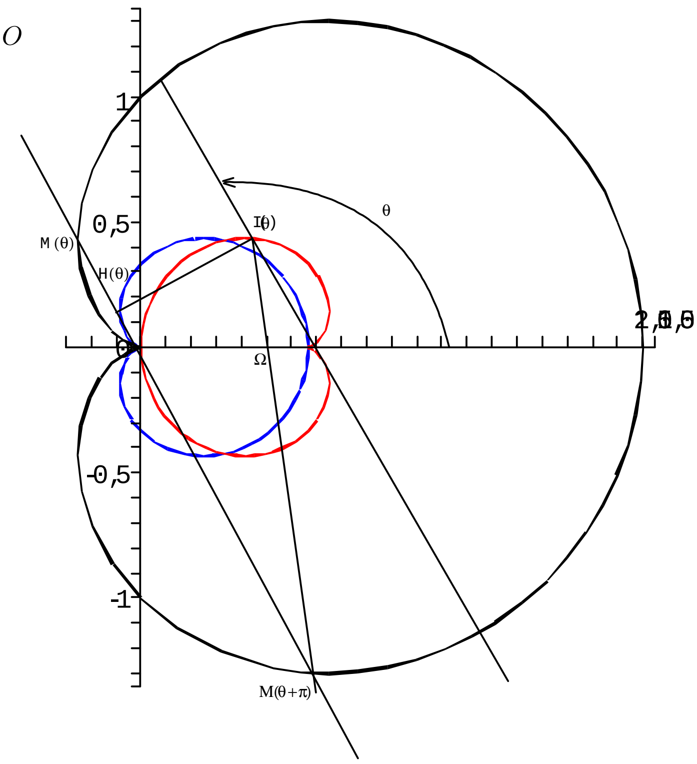
     Ainsi $V = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et $\alpha = V + \theta = \dfrac{3\theta}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ et $\vec{N} = \begin{pmatrix} -\sin V \\ \cos V \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))} = \begin{pmatrix} -\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))}$

- Rayon de courbure : $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{d\alpha} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.
- Enfin $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, donc $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + R\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))} + \dfrac{4}{3}\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\begin{pmatrix} -\cos\dfrac{\theta}{2} \\ -\sin\dfrac{\theta}{2} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}$,

  d'où
  $\overrightarrow{OI}(\theta) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2+\cos\theta(1-\cos\theta) \\ \sin\theta(1-\cos\theta) \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$

2. On a $\overrightarrow{OM}(\theta+\pi) = \begin{pmatrix} -\cos\theta(1-\cos\theta) \\ -\sin\theta(1-\cos\theta) \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})}$, alors le rapport de cette homothétie est $\lambda = -\dfrac{1}{3}$. Si $\Omega = (a,b)$ désigne les coordonées de son centre dans le repère fixe $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, alors on aura $\overrightarrow{\Omega I}(\theta) = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M}(\theta+\pi)$, donc $\overrightarrow{\Omega O} + \overrightarrow{OI}(\theta) = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\Omega O} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OM}(\theta+\pi)$, en identifiant les coordonnées, en obtient $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 0$. Ainsi le centre de cette homothétie est : $\Omega = \left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$.
3. On a $\overrightarrow{OI}(\theta) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta \\ -2\sin\theta \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{u}(\theta),\overrightarrow{v}(\theta))}$, donc $\overrightarrow{OH}(\theta) = \dfrac{1}{3}(1+\cos\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$. Ainsi $H(\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$.
4. Voir figure ci-dessous (Merci Maple) : En noir la cardioïde γ_1, en rouge sa développée γ_I et en bleu la courbe γ_H. (Attention Daltoniens ...)
5. Puisque γ_H se déduit de γ_1 par homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{3}$, alors selon I-(6) et I-(7), on a :

   $l(\gamma_H) = \dfrac{1}{3}l(\gamma_1) = \dfrac{8}{3}$ et Aire$(\gamma_H) = \dfrac{1}{3}$Aire$(\gamma_1) = \dfrac{\pi}{2}$



À la prochaine