Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Libre n°22 (Pr. Bergeron)

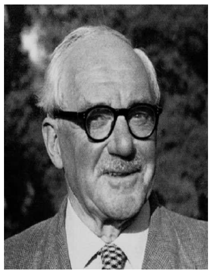
Courbes & Surfaces

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Comment appelle t-on un chien sans pattes ? On ne l'appelle pas, on va le chercher !

- Un vieux rat rencontre une petite taupe. Curieux, il lui demande :
- Que veux-tu faire plus tard, ma petite ?
- Taupe-modèle !!



John Edensor Littlewood (1885-1977)

Mathématicien anglais. Il a surtout travaillé en analyse sur le sujet des fonctions entières. Il a collaboré pendant de nombreuses années avec Hardy et ils ont formulé ensemble deux conjectures. Il a aussi travaillé sur la théorie de Fourier. Il est lauréat de la Médaille Sylvester, de la Royal Medal et de la médaille Copley en 1958.

Mathématicien du jour

Exercice:

1-a) $\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n(r)| = r^n.|\cos(n\theta)| \leq r^n$.

La série géométrique $\sum r^n$ converge car $|r| < 1$.

Par comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum u_n(r) \text{ est absolument convergente donc convergente}}$.

1-b) $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n(r) = Re[(r.e^{i\theta})^n]$.

La série $\sum (r.e^{i\theta})^n$ est une série géométrique de raison $r.e^{i\theta}$ avec $|r.e^{i\theta}| = r < 1$.

Cette série est donc convergente et a pour somme $\sum_{n\geq 0} (r.e^{i\theta})^n = \dfrac{1}{1 - r.e^{i\theta}}$.

Par suite, $\sum_{n\geq 0} r^n.\cos(n\theta) = Re\left(\dfrac{1}{1-r.e^{i\theta}}\right) = Re\left(\dfrac{1}{1-r.\cos\theta - i.r.\sin\theta}\right) = Re\left(\dfrac{1-r.\cos\theta + i.r.\sin\theta}{1-2r.\cos\theta + r^2}\right)$

D'où $\boxed{\sum_{n\geq 0} r^n.\cos(n\theta) = \dfrac{1-r.\cos\theta}{1-2r.\cos\theta + r^2}}$.

2-a) $f(r,\theta) = \dfrac{1 - r.\cos\theta}{1 - 2r.\cos\theta + r^2}$ existe si et seulement si $1 - 2r.\cos\theta + r^2 \neq 0$.

$1 - 2r.\cos\theta + r^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2r.\cos\theta + r^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow (1 - r.\cos\theta)^2 + (r.\sin\theta)^2 = 0$

Donc $1 - 2r.\cos\theta + r^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r.\sin\theta = 0 & \text{(a)} \\ r.\cos\theta = 1 & \text{(b)} \end{cases}$

Comme $r \neq 0$, (a) $\Leftrightarrow \theta \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \cos\theta = \pm 1$.
Comme $|r| < 1$, cette condition est incompatible avec (b).

Par suite: $\boxed{\forall r \in]0, 1[, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ f(r,\theta) = \dfrac{1 - r.\cos\theta}{1 - 2r.\cos\theta + r^2} \text{ existe}}$.

2-b) $\forall r \in]0, 1[, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n.\cos(n\theta) = 1 + 2\left[\sum_{n\geq 0} r^n.\cos(n\theta) - 1\right] = -1 + \dfrac{2(1 - r.\cos\theta)}{1 - 2r.\cos\theta + r^2}$

$\forall r \in]0, 1[, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n.\cos(n\theta) = \dfrac{-1 + 2r.\cos\theta - r^2 + 2 - 2r.\cos\theta}{1 - 2r.\cos\theta + r^2}$

Donc: $\boxed{\forall r \in]0, 1[, \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \ 1 + 2\sum_{n\geq 1} r^n.\cos(n\theta) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r.\cos\theta + r^2}}$.

Problème

Première partie

I-1) On note (H) l'équation différentielle $\sin(2t).f'(t) - \cos(2t).f(t) = 0$.
Si $t \in]0, \pi/2[$ alors $2t \in]0, \pi[$ et $\sin(2t) > 0$ donc $\sin(2t) \neq 0$.

Sur $]0, \pi/2[$, (H) $\Leftrightarrow f'(t) - \dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} f(t) = 0$.

C'est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre résolue en f'.

Si $a(t) = -\dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)}$ alors $A(t) = -\dfrac{1}{2}\ln[\sin(2t)]$ est une primitive de a sur $]0, \pi/2[$
et la solution générale de (H) sur $]0, \pi/2[$ est $f(t) = \lambda.e^{-A(t)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

La solution générale de (H) sur $]0, \pi/2[$ est donc $\boxed{f(t) = \lambda\sqrt{\sin(2t)}, \ \ \lambda \in \mathbb{R}}$.

I-2) On note (E) l'équation différentielle $\sin(2t).f'(t) - \cos(2t).f(t) = (\sin(2t))^{3/2}$.

Sur $]0, \pi/2[$, (E) $\Leftrightarrow f'(t) - \dfrac{\cos(2t)}{\sin(2t)} f(t) = \sqrt{\sin(2t)}$.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre résolue en f'.
On cherche les solutions de (E) sous la forme $f(t) = \lambda(t).\sqrt{\sin(2t)}$.
Il vient: $\lambda'(t).\sqrt{\sin(2t)} = \sqrt{\sin(2t)}$ soit $\lambda'(t) = 1$ et $\lambda(t) = t + k$, $k \in \mathbb{R}$.

La solution générale de (E) sur $]0, \pi/2[$ est donc $\boxed{f(t) = (t + k)\sqrt{\sin(2t)}, \ k \in \mathbb{R}}$.

Deuxième partie

II-1.a) $d(AM).d(BM) = k^2 \Leftrightarrow \boxed{[(x + a)^2 + y^2][(x - a)^2 + y] = k^4}$ (*)

II-1.b) (*) $\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + a^2 + 2ax)(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax) = k^4$
(*) $\Leftrightarrow (r^2 + a^2 + 2ar.\cos\theta)(r^2 + a^2 - 2ar.\cos\theta) = k^4$
(*) $\Leftrightarrow \boxed{(r^2 + a^2)^2 - 4a^2.r^2.\cos^2\theta = k^4}$.

II-2.a) Si on pose $R = r^2$, il vient $(R + a^2)^2 - 4a^2.R.\cos^2\theta = k^4$
ou encore $R^2 + 2a^2.R.(1 - 2\cos^2\theta) + a^4 - k^4 = 0$.
Comme $2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$,
R est solution de l'équation du second degré: $\boxed{R^2 - 2a^2.R.\cos(2\theta) + a^4 - k^4 = 0}$ (1).

II-2.b) → Pour cette équation du second degré, $\Delta = 4a^4.\cos^2(2\theta) - 4a^4 + 4k^4 = 4[k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)]$.
Donc $\boxed{\text{(1) admet des racines réelles ssi } k^4 \geq a^4.\sin^2(2\theta)}$.

→ Dans ce cas, leur produit vaut $a^4 - k^4$ et leur somme vaut $2a^2.\cos(2\theta)$.

Pour avoir deux racines positives, on obtient les conditions $\boxed{\begin{cases} a^4.\sin^2(2\theta) \leq k^4 \leq a^4 \\ \cos(2\theta) \geq 0 \end{cases}}$.

II-2.c) Si l'équation admet des racines réelles positives alors $R = r^2 = a^2.\cos(2\theta) \pm \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)} \geq 0$

donc $\boxed{r = \pm\sqrt{a^2.\cos(2\theta) \pm \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)}}}$

ce qui donne bien 4 courbes d'équations polaires respectives:

$r_1(\theta) = \sqrt{a^2.\cos(2\theta) - \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)}}$ $\qquad r_2(\theta) = \sqrt{a^2.\cos(2\theta) + \sqrt{k^4 - a^4.\sin^2(2\theta)}}$
$r_3(\theta) = -r_1(\theta)$ et $r_4(\theta) = -r_2(\theta)$.

II-2.d) Il faut tenir compte de la condition $\cos(2\theta) \geq 0$ pour préciser l'intervalle d'étude.

→ Les quatre fonctions r_i étant π-périodiques, on se restreint à une étude sur $[-\pi/4, \pi/4]$ suivie d'une symétrie par rapport au point O (rotation de centre O et d'angle π).

→ Ces quatre fonctions étant paires, on peut encore se restreindre à $[0, \pi/4]$ puis faire une symétrie par rapport à l'axe polaire suivie de la symétrie par rapport au pôle.

II-3.a) Si $k = \pm a$, il vient $r = \pm\sqrt{a^2.\cos(2\theta) \pm a^2\sqrt{1 - \sin^2(2\theta)}} = \pm a\sqrt{\cos(2\theta) \pm \cos(2\theta)}$

On obtient donc $\boxed{r = \pm a\sqrt{2\cos(2\theta)}}$ car la valeur $r = 0$ est atteinte pour $\theta = \frac{\pi}{4}$.

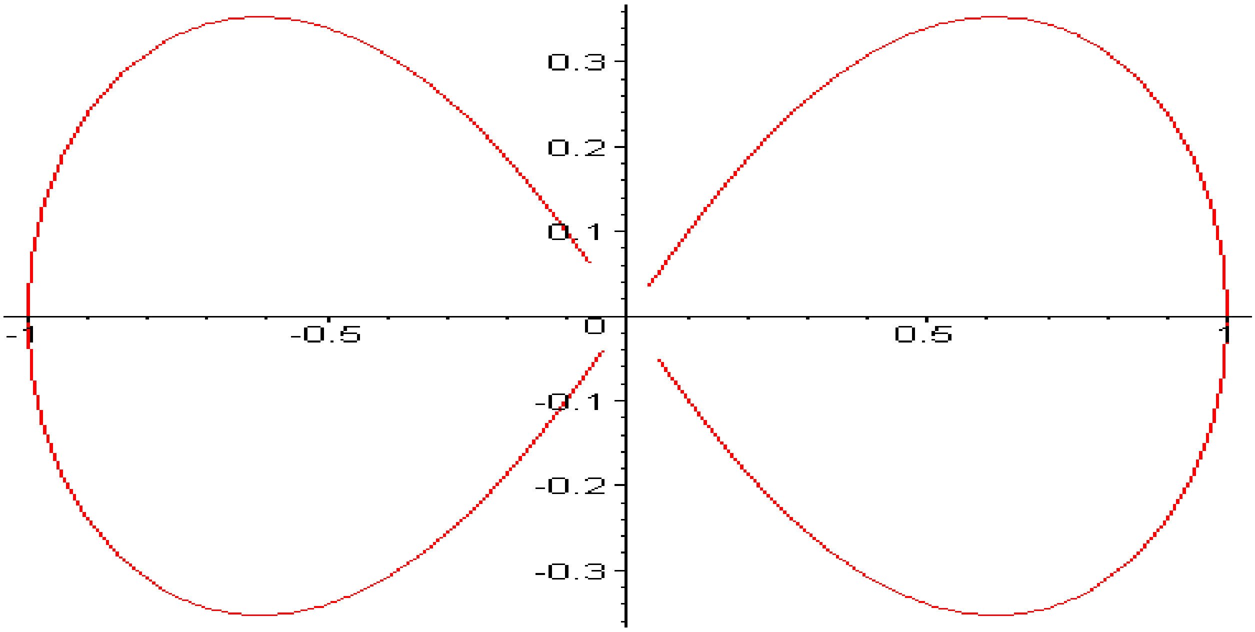
On retrouve, pour ce cas particulier, les symétries précédentes:
→ par rapport à O par π-périodicité,
→ par rapport à $(O, \vec{i})$ par parité,
→ par rapport à $(O, \vec{j})$ par combinaison des deux précédentes.

II-a.b) → Les symétries permettent de se limiter à l'étude de $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$ sur $[0, \pi/4]$.
→ Sur cet intervalle, $\cos(2\theta)$ décroit de 1 à 0 donc r décroit de 1 à 0 en restant positif.

<u>Note</u>: $r' = -\dfrac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}$

→ Pour $\theta = 0$, la courbe passe par le point I(1, 0).
Sa tangente dans le repère mobile est dirigée par $\vec{T}\,(0, 1)$
ce qui donne une tangente verticale.

→ Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, la courbe passe par le pôle et la tangente est la droite $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Troisième partie

III-1.a) $\boxed{\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = z \end{cases}}$.

III-1.b) $X\vec{u} + Y\vec{v} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Leftrightarrow$ $(X.\cos\theta - Y.\sin\theta)\vec{i} + (X.\sin\theta + Y.\cos\theta)\vec{j} + Z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X.\cos\theta - Y.\sin\theta = x \\ X.\sin\theta + Y.\cos\theta = y \\ Z = z \end{cases}$ car $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une famille libre

$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} X = x.\cos\theta + y.\sin\theta \\ Y = -x.\sin\theta + y.\cos\theta \\ Z = z \end{cases}}$.

III-1.c) $\begin{cases} \vec{u} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j} \\ \vec{v} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta.\vec{u} - \sin\theta.\vec{v} \\ \vec{j} = \sin\theta.\vec{u} + \cos\theta.\vec{v} \end{cases}}$.

$\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial\theta} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j} = \vec{v}$ et $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial\theta} = -\cos\theta.\vec{i} - \sin\theta.\vec{j} = -\vec{u}$ donc $\boxed{\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial\theta} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial\theta} = -\vec{u}}$.

III-1.d) La matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est $P = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est la matrice de la rotation d'angle θ et d'axe $(O, \vec{k})$.
C'est donc une matrice orthogonale de déterminant égal à +1.
Comme $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe,
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est aussi une base orthonormale directe.
Par suite $\boxed{(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k}) \text{ est un repère orthonormal direct}}$.

III-2.a) Il est nécessaire d'exclure les points de l'axe $(O, \vec{k})$ pour que le calcul de z ait un sens donc on travaillera avec $r \in \mathbb{R}^*$.

$z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ s'écrit $z = \dfrac{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^2}$ soit $\boxed{z = \cos(2\theta)}$.

(Σ) apparaît donc comme l'image de la nappe paramétrée

$$\boxed{(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times [0, 2\pi[\longmapsto M \begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = \cos(2\theta) \end{cases}}.$$

III-2.b) $z = \cos(2\theta) \Rightarrow -1 \leq z \leq 1$.

$\boxed{\text{Donc } (\Sigma) \text{ est contenue dans la partie de } \mathbb{R}^3 \text{ comprise entre les deux plans parallèles d'équation } z = -1 \text{ et } z = 1.}$

III-2.c) Pour une valeur fixée θ_0 de θ dans $[0, 2\pi[$, il vient $\begin{cases} x = 0 + \cos(\theta_0) \times r \\ y = 0 + \sin(\theta_0) \times r \\ z = \cos(2\theta_0) + 0 \times r \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}^*$.

C'est une représentation paramétrique de la droite $(C, \vec{U})$ avec $C\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2\theta_0) \end{pmatrix}$ et $\vec{U}\begin{pmatrix} \cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$

privée du point C et cette droite est parallèle au plan d'équation $z = 0$.

Par suite: $\boxed{(\Sigma) \text{ est une réunion de droites parallèles au plan d'équation } z = 0}$.

III-3.a) Dans le repère cylindrique $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta), \vec{k})$, $M(r, \theta, z)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ \cos(2\theta) \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}(\theta) + \cos(2\theta).\vec{k}$ donne $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta}(r, \theta) = r.\vec{v}(\theta) - 2.\sin(2\theta).\vec{k}$ et $\dfrac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial r}(r, \theta) = \vec{u}(\theta)$.

$$\boxed{\vec{N}(r, \theta) = \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial r}(r, \theta) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{M}}{\partial \theta}(r, \theta) = 2.\sin(2\theta).\vec{v}(\theta) + r.\vec{k} \text{ est un vecteur normal à } (\Sigma) \text{ au point M}}.$$

III-3.b) $P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Pi_M \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} r - X \\ -Y \\ \cos(2\theta) - Z \end{pmatrix} \perp \vec{N}(r, \theta) \Leftrightarrow -2.\sin(2\theta).Y + r.(\cos(2\theta) - Z) = 0$

Une équation de Π_M dans le repère cylindrique est donc: $\boxed{2.\sin(2\theta)Y + r.Z = r.\cos(2\theta)}$.

III-3.c) $P\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in \Pi_M \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & X - r \\ 0 & r & Y \\ 0 & -2.\sin(2\theta) & Z - \cos(2\theta) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} r & Y \\ -2.\sin(2\theta) & Z - \cos(2\theta) \end{vmatrix} = 0.$

Ce qui redonne l'équation $\boxed{2.\sin(2\theta)Y + r.Z = r.\cos(2\theta)}$.

III-3.d) La droite dont il est question est celle définie à la question III-2.c.

Elle a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = r.\cos\theta \\ y = r.\sin\theta \\ z = \cos(2\theta) \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}^*$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

donc $\begin{cases} X = r \\ Y = 0 \\ Z = \cos(2\theta) \end{cases}$, $r \in \mathbb{R}^*$ dans le repère cylindrique.

$\forall r \in \mathbb{R}^*$, $2.\sin(2\theta)\times 0 + r.\cos(2\theta) = r.\cos(2\theta)$ est une égalité vraie.

Donc tous les points de la droite appartiennent à Π_M.

Par suite: $\boxed{\text{cette droite est incluse dans } (\Sigma) \cap \Pi_M}$.

III-4) Soit $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ un point de (Σ),

le vecteur $\vec{N}' = (4ab^2, -4a^2b, -(a^2 + b^2)^2)$ est un vecteur normal à (Σ).

$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi_M \Leftrightarrow \vec{PM} \perp \vec{N}' \Leftrightarrow \boxed{4ab^2.x - 4a^2b.y - (a^2 + b^2)^2.z + a^4 - b^4 = 0}$.

<u>Quatrième partie</u>

IV-1.a) Le point $M(r(t), \theta(t), z(t))$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ dans le repère cylindrique.

$\boxed{M \in (\Sigma) \Leftrightarrow z(t) = \cos[2\theta(t)]}$.

IV-1.b) $\vec{OM}(t) = r(t).\vec{u} + \cos[2\theta(t)].\vec{k}$.

Le point M étant régulier la tangente en M à (Γ) est dirigée par le vecteur $\dfrac{d\vec{M}}{dt}$.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = r'(t).\vec{u} + r(t).\theta'(t).\vec{v} - 2\sin[2\theta(t)].\theta'(t).\vec{k}.$$

$$\det\left(\frac{d\vec{M}}{dt}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial\theta}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial r}\right) = \begin{vmatrix} r' & 0 & 1 \\ r.\theta' & r & 0 \\ -2.\sin(2\theta).\theta' & -2.\sin(2\theta) & 0 \end{vmatrix} = -2.r.\sin(2\theta).\begin{vmatrix} \theta' & 1 \\ \theta' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Donc $\boxed{\text{la tangente à } (\Gamma) \text{ est contenue dans le plan } \Pi_M}$.

IV-1.c) Soit θ_0 une valeur fixe dans $[0, 2\pi[$.

(Γ): $t \in I \longmapsto (r(t), \theta_0, \cos(2\theta_0))$ avec r de classe C^1 sur I définit un arc de classe C^1 tracé sur (Σ).

Au point $M(t_0)$, la tangente à (Γ) est dirigée par $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = r'(t).\vec{u}$ car $(\theta_0)' = 0$.

On retrouve la droite définie au III-2.c.

$\boxed{\text{Cette droite est donc bien incluse dans } (\Sigma) \cap \Pi_M}$.

IV-2) $\overrightarrow{OM}(\theta) = r(\theta).\vec{u} + \cos(2\theta).\vec{k}$

$\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = r'(\theta).\vec{u} + r(\theta).\vec{v} - 2.\sin(2\theta).\vec{k}}$ et $\boxed{\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) = [r''(\theta) - r(\theta)].\vec{u} + 2r'(\theta).\vec{v} - 4.\cos(2\theta).\vec{k}}$.

IV-3.a) Le point $M(\theta)$ est commun aux deux plans P_M et Π_M.
On travaille dans le repère cylindrique.

$\rightarrow \quad \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)\begin{pmatrix} 0 \\ 2.\sin(2\theta) \\ r(\theta) \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Π_M.

$\rightarrow \quad \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta)\begin{pmatrix} r'(\theta) \\ r(\theta) \\ -2.\sin(2\theta) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta)\begin{pmatrix} r''(\theta) - r(\theta) \\ 2r'(\theta) \\ -4.\cos(2\theta) \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de P_M
et ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.

$$P_M = \Pi_M \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) & (3) \\ \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) & (4) \end{cases}$$

Donc $\boxed{(\Gamma) \text{ est une ligne asymptôtique de } (\Sigma) \text{ ssi } \begin{cases} \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) \\ \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta) \perp \dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) \end{cases}}$.

IV-3.b) (3) est toujours vraie.
(4) $\Leftrightarrow \sin(2\theta).r'(\theta) - \cos(2\theta).r(\theta) = 0$ ce qui correspond à l'équation (H) de la partie I.
$\boxed{\text{La courbe } (\Gamma) \text{ est une ligne asymptotique de } (\Sigma) \text{ ssi } r \text{ est solution de l'équation (H)}}$.

IV-3.c) $\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = 0 \Rightarrow \dfrac{d\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)}{d\theta}.\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) + \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) = 0$

$$P_M = \Pi_M \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = 0 \\ \overrightarrow{N}(r(\theta), \theta).\dfrac{d^2\overrightarrow{M}}{d\theta^2}(\theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{d\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)}{d\theta}.\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = 0$$

Comme $\dfrac{d\overrightarrow{N}(r(\theta), \theta)}{d\theta}\begin{pmatrix} -2.\sin(2\theta) \\ 4.\cos(2\theta) \\ r'(\theta) \end{pmatrix}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta)\begin{pmatrix} r'(\theta) \\ r(\theta) \\ -2.\sin(2\theta) \end{pmatrix}$
on retrouve la condition
$\boxed{(\Gamma) \text{ est une ligne asymptôtique de } (\Sigma) \Leftrightarrow r \text{ est solution de l'équation (H)}}$.

IV-4) Si (Γ) est une ligne asymptôtique de (Σ), alors la projection de (Γ) sur le plan d'équation $z = 0$ est $\boxed{\text{une courbe d'équation polaire } r(\theta) = \lambda\sqrt{\sin(2\theta)},\ \lambda \in \mathbb{R}}$.

FIN

À la prochaine