Corrige Problème I : Pr. Duval, CPGE France

Première partie

1a) $(V \mid x^{(\ell)}) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k x_k^{(\ell)} \det(X_k)$ où X est la matrice de terme général $x_j^{(i)}$ et X_k la matrice déduite de X en supprimant la k-ème ligne. La somme précédente est égale à l'opposé au déterminant de la matrice X complétée par la colonne $x^{(\ell)}$ sur sa gauche. Cette matrice a deux colonnes égales donc son déterminant vaut zéro.

1b) $V = 0$ si et seulement si tous les mineurs d'ordre n extraits de X sont nuls, ce qui équivaut au fait que $\mathrm{rg}(X) < n$, ou aussi à la liaison de la famille $(x^{(i)})$.

1c) En reprenant le raisonnement de **1a**, pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^{n+1}$ on a $(u \mid V) = \det(u, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, déterminant calculé dans la base canonique de $\mathbf{R}^{n+1}$. En particulier $\|V\|^2 = \det(V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$.

2a) Si $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est libre alors le vecteur $W = V/\|V\|$ vérifie **i** et **ii**. Par ailleurs, $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}^\perp$ est une droite vectorielle (orthogonal d'un hyperplan de $\mathbf{R}^{n+1}$) donc les seuls vecteurs orthogonaux à tous les $x^{(i)}$ sont les multiples de W et les conditions **i** et **ii** imposent que le coefficient de proportionnalité vaut 1. Ceci prouve l'unicité de W.

2b) La notion de rotation n'est pas claire. S'agit-il de la composée de deux réflexions ou d'un endomorphisme orthogonal positif quelconque (les deux notions coïncident en dimension 2 et 3, la deuxième est plus générale dans le cas n quelconque) ? On considère ici qu'il s'agit d'un endomorphisme orthogonal positif. Soit donc $R \in \mathcal{O}^+(\mathbf{R}^{n+1})$ et $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ une famille libre de $\mathbf{R}^{n+1}$. La famille image est aussi libre par injectivité de R. De plus, comme R conserve la norme et le produit scalaire, on a $R(W) \perp R(x^{(i)})$ pour tout i et $\|R(W)\| = 1$. Enfin, $\det(R(W), R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = \det(R)\det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) > 0$ car $\det(R) = 1$.

3a) Q est diagonalisable car symétrique réelle. La forme quadratique q associée à Q est définie par $q(a_1, \dots, a_n) = \|a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n\|^2$, donc elle est définie positive puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est libre. On en déduit $\mathrm{Spec}(Q) \subset \mathbf{R}^{+*}$ et en particulier Q est inversible.

3b) $(v \mid e_i) = (v_1 \ \dots \ v_n) Q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le « 1 » est en i-ème ligne. On en déduit : $((v \mid e_1) \ \dots \ (v \mid e_n)) = (v_1 \ \dots \ v_n) Q$.

4a) Chaque vecteur $x^{(i)} = \partial_i F(u)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de u. Le vecteur V défini en **1** est une fonction polynomiale des $x_j^{(i)}$, donc est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ et $V \neq 0$ pour tout u par hypothèse. On en déduit que $\|V\|$ et $W = V/\|V\|$ sont aussi des fonctions de u de classe $\mathcal{C}^1$.

4b) En dérivant la relation $(W(u) \mid \partial_i F(u)) = 0$ par rapport à la k-ème coordonnée de u et à l'aide du théorème de Schwarz on obtient : $(\partial_k W(u) \mid \partial_i F(u)) = -(W(u) \mid \partial_k \partial_i F(u)) = -(W(u) \mid \partial_i \partial_k F(u))$.

4c) De même, la relation $(W(u) \mid W(u)) = 1$ donne par dérivation : $(W(u) \mid \partial_i W(u)) = 0$. Donc le vecteur $\partial_i W(u)$ appartient à $W(u)^\perp = <\partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u)>$. Les coefficients $a_{ij}(u)$ sont les composantes de $\partial_i W(u)$ dans la base $(\partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u))$ de $W(u)^\perp$, d'où leur existence et leur unicité.

4d) Conséquence immédiate des résultats obtenus en **3b** et **4b**.

Deuxième partie

5) R étant linéaire, $\partial_i \hat{F} = R \circ (\partial_i F)$ donc $\hat{W} = R \circ W$ d'après **2b**. Comme R conserve le produit scalaire et commute avec les dérivations, on en déduit $\hat{S} = S$ et $\hat{Q} = Q$, d'où $\hat{A} = A$ d'après **4d**, et enfin $\hat{K} = K$, $\hat{H} = H$.

✉ : mamouni.myismail@gmail.com

6a) $\partial_1 F(u) = (1, 0, \partial_1 f(u))$, $\partial_2 F(u) = (0, 1, \partial_2 f(u))$ donc $W(u) = (-\partial_1 f(u), -\partial_2 f(u), 1)/\sqrt{(\partial_1 f(u))^2 + (\partial_2 f(u))^2 + 1}$ et $W(0) = (0, 0, 1)$. $S(0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) = -S(0)$ d'où $K(0) = rt - s^2$, $H(0) = -\frac{r+t}{2}$.

6b) Ici $s = t = 0$ donc $H(0) = -\frac{1}{2}r$. Pour définir la courbure d'une courbe dans le plan d'équation $x_2 = 0$, il est nécessaire d'orienter ce plan. On convient de l'orienter de sorte que la base (e_3, e_1) soit directe (ce qui revient à orienter la normale $< e_2 >$ dans le sens de e_2). D'après la relation générale $c = \det(\overrightarrow{M}', \overrightarrow{M}'')/\|\overrightarrow{M}'\|^3$ donnant la courbure d'une courbe plane paramétrée, on a ici $c(0) = -r$ donc $H(0) = \frac{1}{2}c(0)$.

7a) $\partial_1 F(u) = (f'(u_1)\cos u_2, f'(u_1)\sin u_2, 1)$ et $\partial_2 F(u) = (-f(u_1)\sin u_2, f(u_1)\cos u_2, 0)$ sont liés si et seulement si $\partial_2 F(u) = 0$ vu la troisième composante, soit si et seulement si $f(u_1) = 0$, ce qui est exclu dans l'énoncé.

7b) Calcul sans difficulté.

7c) On veut $ff'' = 1 + f'^2$, ce qui est réalisé pour $f(t) = \operatorname{ch} t$ par exemple. La surface obtenue est appelée *caténoïde*, voir `http://www.mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml` pour une description de cette surface et de ses propriétés.

7d) En essayant $f(t) = \lambda \operatorname{ch}(\mu t + \nu)$ on obtient les équations : $\lambda^2\mu^2 = 1$, $\lambda \operatorname{ch}\nu = \alpha$, $\lambda\mu \operatorname{sh}\nu = \beta$ qui ont pour solution $\nu = \operatorname{argsh}\beta$, $\lambda = \alpha/\sqrt{1+\beta^2}$ et $\mu = 1/\lambda$.

Interprétation géométrique : $f(0) = \alpha$ est la distance du point $F(0)$ à l'axe de révolution et $f'(0) = \beta$ est la pente de la méridienne passant par $F(0)$. On vient donc de constater que *par tout point du plan $< e_1, e_2 >$ autre que l'origine et pour toute droite sécante à $< e_3 >$ passant par ce point, il existe une surface de révolution autour de $< e_3 >$ à courbure moyenne nulle, passant par ce point et tangente à cette droite...*

7e) $K(u) = \dfrac{-f''(u_1)}{f(u_1)(1 + f'^2(u_1))^2} = \dfrac{-\mu^2}{\operatorname{ch}^4(\mu u_1 + \nu)}$.

8) En prenant f constante non nulle, la matrice A est constante et donc K et H le sont. Les surfaces correspondantes sont les cylindres de révolution autour de $< e_3 >$. On peut aussi penser aux sphères d'axe $< e_3 >$, soit $f(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$, qui conviennent (avec un peu de calcul) : $A(u) = I/R$ où I est la matrice identité.

Troisième partie

9) Conséquence immédiate de **4c**.

10a) Remarque : la classe de Φ n'est pas précisée. On suppose ici que Φ est de classe $\mathcal{C}^2$.
$\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$ (produit de matrices jacobiennes).
En notant $\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a donc $\partial_1 \tilde{F} = (a\partial_1 F + c\partial_2 F) \circ \Psi$ et $\partial_2 \tilde{F} = (b\partial_1 F + d\partial_2 F) \circ \Psi$,
d'où $\partial_1 \tilde{F} \wedge \partial_2 \tilde{F} = (ad - bc)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi) = \det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi)$.

10b) D'après la relation précédnte, $\tilde{W} = \operatorname{sgn}\left(\det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)\right)(W \circ \Psi)$, et le signe de $\det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est constant sur $\tilde{U}$ ($\det\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est une fonction continue jamais nulle et $\tilde{U} = \Phi(U)$ est connexe par arcs).

10c) $\dfrac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial W}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} \times {}^t\!A\right) \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \left({}^t\!A \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1} \times \left({}^t\!A \circ \Psi\right) \times \dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.
La matrice $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ est inversible puisque $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ l'est. On en déduit : $\tilde{A}(\tilde{u}) = \varepsilon\, {}^t\!\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right) \times A(u) \times {}^t\!\left(\dfrac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1}$.

10d) En prenant la demi-trace et le déterminant : $\tilde{H}(\tilde{u}) = \varepsilon H(u)$ et $\tilde{K}(\tilde{u}) = K(u)$.

Corrigé Problème II : Pr. Patte, CPGE France

Un difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

18. La fonction φ_I est la composée de l'exponentielle et d'une fonction rationnelle sans pôle dans I, donc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
S'il existe un polynôme P_n tel que $\forall t \in I, \varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$, alors $\forall t \in I$,

$$\begin{aligned}\varphi_I^{(n+1)}(t) &= \left(\frac{P_n'(t)}{(t^2-1)^{2n}} + P_n(t)\frac{-2n.2t}{(t^2-1)^{2n+1}} + \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}}.\frac{-2t}{(t^2-1)^2}\right)\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \frac{(t^2-1)^2P_n'(t) - 4nt(t^2-1)P_n(t) - 2tP_n(t)}{(t^2-1)^{2(n+1)}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).\end{aligned} \quad (1)$$

Donc, avec le polynôme $P_{n+1}(t) = (t^2-1)^2P_n'(t) - 4nt(t^2-1)P_n(t) - 2tP_n(t)$, on obtient :

$$\forall t \in I, \varphi_I^{(n+1)}(t) = \frac{P_{n+1}(t)}{(t^2-1)^{2(n+1)}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$

Comme $\forall t \in I, \varphi_I^{(0)}(t) = \varphi_I(t) = \frac{P_0(t)}{(t^2-1)^{2.0}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right)$ avec $P_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists P_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \forall t \in I, \varphi_I^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(t^2-1)^{2n}}\exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right).$$

19. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions à $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ et $]1,+\infty[$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi^{(n)}$ a pour limite 0 en 1 et en -1 (en 1 à gauche et en -1 à droite par croissances comparées). Donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Comme φ' est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle en dehors du compact $[-1,1]$, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. D'où l'existence de $M = \sup\limits_{\mathbb{R}} |\varphi'|$.

20. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction ψ_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_\lambda'(x) = 1 + \lambda\varphi'(x)$. Comme $|\lambda\varphi'(x)| \le |\lambda|M$, si $|\lambda| < 1/M$, alors $\psi_\lambda'(x) \ge 1 - |\lambda|M > 0$ et la fonction ψ_λ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Mieux, c'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\psi_\lambda(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{-\infty}\psi_\lambda, \lim\limits_{+\infty}\psi_\lambda[$.
De plus, si $x \notin [-1,1], \psi_\lambda(x) = x$. Donc $\lim\limits_{+\infty}\psi_\lambda = +\infty$. De même que $\lim\limits_{-\infty}\psi_\lambda = -\infty$. Donc la fonction ψ_λ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

21. Par la fonction $\theta^P_{\lambda,r}$, le point P est envoyé sur le point de coordonnées $(p + \frac{\lambda}{e}, q)$. En notant $M = (x,y)$ et PM la distance usuelle de P à M, on a $\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2} = \frac{PM^2}{r^2}$ et $\varphi(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}) = 0$ dès que $PM \ge r$. Donc la fonction $\theta^P_{\lambda,r}$ fixe tout point hors du disque ouvert de centre P et de rayon r ; en particulier les points du cercle C^P_r et de l'ouvert Ω^P_r.

Existence de difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^\infty$:

22. Comme φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction $\theta^P_{\lambda,r}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le plan $\mathbb{R}^2$. D'après le théorème d'inversion globale, il suffit que la fonction $\theta^P_{\lambda,r}$ soit bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et que son jacobien ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$ pour que ce soit un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Étude du jacobien : au point (x,y), il vaut :
$J(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 + \lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right) & *** \\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1 + \lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right)$.
Si $(x-p)^2+(y-q)^2 \ge r^2$, alors $J(x,y) = 1$; sinon $|x-p| \le r$, donc $\left|\lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right)\right| \le \frac{2|\lambda|M}{r}$, donc $J(x,y) \ge 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$.

Finalement, sur tout le plan, $J(x,y) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$.

Donc, si on choisit λ et r tels que $1 - \frac{2|\lambda|M}{r} > 0$, i.e. $|\lambda| < \frac{r}{2M}$, le jacobien J ne s'annule pas sur le plan.

Bijectivité de $\theta^P_{\lambda,r}$ sous cette condition en λ :

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(X,Y) = \theta^P_{\lambda,r}(x,y)$. Or

$$\begin{aligned}(X,Y) = \theta^P_{\lambda,r}(x,y) &\Leftrightarrow X = x + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right) \text{ et } Y = y \\ &\Leftrightarrow y = Y \text{ et } X = f(x)\end{aligned} \tag{2}$$

où $f(x) = x + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2+(Y-q)^2}{r^2}\right)$. Il suffit donc de montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ pour obtenir l'existence et l'unicité de (x,y) tel que $(X,Y) = \theta^P_{\lambda,r}(x,y)$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $f'(x) = 1 + \lambda\frac{2(x-p)}{r^2}\varphi'\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right) \geq 1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$. Comme $1 - \frac{2|\lambda|M}{r}$ est une constante strictement positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$; mieux, f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Au voisinage de l'infini, $\frac{(x-p)^2+(Y-q)^2}{r^2} > 1$, donc $f(x) = x$ et, comme à la question 20, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Finalement, sous la condition $|\lambda| < \frac{r}{2M}$, la fonction $\theta^P_{\lambda,r}$ est bijective du plan sur lui-même. Avec l'étude du jacobien, $\theta^P_{\lambda,r}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

23. L'application $\theta^B_{\lambda,r}$ transforme B en B' dès que $b' = b + \frac{\lambda}{\mathrm{e}}$, i.e. $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$. C'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan si $|\lambda| < \frac{r}{2M}$. Elle laisse les points A_i invariants dès que $\forall i, BA_i \geq r$, i.e. $r \leq \min_{1\leq i\leq n} BA_i$.

    Il suffit donc de trouver un couple (λ, r) tel que $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$ et $2M|\lambda| < r \leq \min_{1\leq i\leq n} BA_i$, i.e. $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$ et $2M\mathrm{e}|b'-b| < r \leq \min_{1\leq i\leq n} BA_i$. C'est possible dès que $2M\mathrm{e}|b'-b| < \min_{1\leq i\leq n} BA_i$, i.e. $|b'-b| < \frac{\min_{1\leq i\leq n} BA_i}{2M\mathrm{e}}$.

    On pose alors $\lambda = \mathrm{e}(b'-b)$; on choisit r dans l'intervalle $]2M\mathrm{e}|b'-b|, \min_{1\leq i\leq n} BA_i]$: l'application $\theta^B_{\lambda,r}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant B en B' et conservant les points A_i.

    Remarque : on peut remplacer $\min_{1\leq i\leq n} BA_i$ par $\min_{1\leq i\leq n} |y_i - c|$ sans changement.

24. On partage le segment $[B,B']$ en $k+1$ sous-segments de sorte que $\frac{|b'-b|}{k+1} < \frac{\min_{1\leq i\leq n}|y_i-c|}{2M\mathrm{e}}$. On note B_i le point de coordonnées $(b + i\frac{b'-b}{k+1}, 0)$. Les couples (B_i, B_{i+1}) vérifient les hypothèses de la question 23 : $B_iB_{i+1} = \frac{|b'-b|}{k+1} < \frac{\min_{1\leq i\leq n}|y_i-c|}{2M\mathrm{e}}$. On pose alors $\lambda = \mathrm{e}\frac{(b'-b)}{k+1}$; on choisit r dans l'intervalle $]2M\mathrm{e}\frac{|b'-b|}{k+1}, \min_{1\leq i\leq n}|y_i-c|]$: l'application $\theta^{B_i}_{\lambda,r}$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant B_i en B_{i+1} et conservant les points A_j. L'application $F = \theta^{B_k}_{\lambda,r} \circ \ldots \circ \theta^{B_1}_{\lambda,r} \circ \theta^{B_0}_{\lambda,r}$ est alors un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan transformant B en B' et conservant les points A_j.

25. On échange le rôle des coordonnées : on utilise l'application $\eta^P_{\lambda,r}$ définie par $\eta^P_{\lambda,r}(x,y) = \left(x, y + \lambda\varphi\left(\frac{(x-p)^2+(y-q)^2}{r^2}\right)\right)$.

26. Deux cas :

    Cas particulier : aucun point A_i n'appartient à la droite (BB').

    On se ramène au cas étudié dans la question 24 par rotation. On note θ l'angle entre l'axe $y=0$ et la droite (BB') et, pour $\tau \in \mathbb{R}$, on note R_τ la rotation d'angle τ autour de l'origine. Les points $\hat{B} = R_{-\theta}(B)$ et $\hat{B}' = R_{-\theta}(B')$ et la suite finie constituée des points $\hat{A}_i = R_{-\theta}(A_i)$ pour $i \in \{1,\ldots,n\}$ sont dans la configuration de la question 24. On considère un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan : F, transformant $\hat{B}$ en $\hat{B}'$ et conservant les points $\hat{A}_i$. Soit $G = R_\theta \circ F \circ R_{-\theta}$. Comme les rotations sont des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes du plan, G aussi et G transforme B en B' et conserve les points A_i.

    Cas général : on utilise un point A tel qu'aucun point A_i n'appartienne aux droites (BA) et (AB').

    D'après le cas particulier, il existe des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes du plan F_1 et F_2 conservant les points A_i et transformant respectivement B en A et A en B'. L'application $F_2 \circ F_1$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme du plan conservant les points A_i et transformant B en B'.

    Existence de A : il suffit de choisir A sur le cercle (C) de diamètre $[B,B']$ autre que B, B', et les points (en nombre fini) d'intersection du cercle (C) et des droites (BA_i) et $(B'A_i)$.

27. On procède par récurrence sur n.