ECOLE DE L'AIR
MATH 2 2005

La rédaction du sujet suppose parfois, sans le dire, que quand le paramètre t décrit $\mathbb{R}$, le paramètre s décrit aussi $\mathbb{R}$. prendre un mobile dont la vitesse est pour $t \in \mathbb{R}$ $\frac{ds}{dt}(t) = \frac{1}{1+t^2}$, t décrira l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$

1.a)

Soit provisoirement ρ la courbure (pour distinguer du c du sujet) .Soit s quelconque , $z(s)$ est l'affixe de $M(s)$ et $z'(s)$ est l'affixe de $\overrightarrow{T}(s)$, ce qui impose $|z'(s)| = 1$. Si on dérive une seconde fois $z"(s)$ est l'affixe du vecteur $\begin{pmatrix} x"(s) \\ y"(s) \end{pmatrix} = \overrightarrow{\rho(s)N}(s) = \rho(s)\mathcal{R}_{\pi/2}(\overrightarrow{T}(s))$. Or une rotation d'angle $\pi/2$ se traduit par une multiplication par le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$, donc par i . $z"(s) = \rho(s)iz'(s)$.

On a donc : $z"(s) = ic(s)z'(s)$ si et seulement si $ic(s)z'(s) = i\rho(s)z'(s)$ Or $z'(s)$ est de module 1 donc toujours non nul. Le résultat précédent équivaut donc à $c(s) = \rho(s)$.

$$\boxed{\forall s \in \mathbb{R}\ ,\ z"(s) = c(s)iz'(s)\ \text{, si et seulement si } c \text{ est la fonction courbure}}$$

1.b)

- Si c est la fonction nulle z vérifie l'équation $z" = 0$, donc z' est constante et de module 1 , il existe θ tel que $z'(s) = e^{i\theta}$. en intégrant $z(s) = e^{i\theta}s + z_0$. Soit $\left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\theta)\, s + x_0 \\ y = \sin(\theta)\, s + y_0 \end{array} \right.$

  On vérifie que pour une telle courbe $\overrightarrow{T}(s) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ et $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \overrightarrow{0}$

$$\boxed{\text{une courbe de courbure toujours nulle est incluse dans une droite , la droite entière si } s \text{ décrit } \mathbb{R}}$$

- Si c est une constante non nul on a : $z"(s) = ciz'(s)$, donc en intégrant l'équation différentielle $z'(s) = Ke^{cis}$. et comme $|z's)| = 1$ il existe θ tel que $z'(s) = e^{i\theta}e^{ics}$. En intégrant

$$z(s) = e^{i\theta}\frac{e^{ics}}{ic} + z_0$$

  On a donc $|z(s) - z_0| = \frac{1}{|c|}$

$$\boxed{\text{Une courbe de courbure } c \text{ constante non nulle est incluse dans un cercle de rayon } \frac{1}{c}}$$

  Réciproquement on vérifie que pour un cercle de rayon R la courbure est constante et vaut $\frac{1}{R}$.

  Si tous les points sont des sommets , la courbe est donc un morceau de droite ou un morceau de cercle.

1.c)

Si $c(s) = \frac{1}{1+s^2}$ on a $z"(s) = \frac{i}{1+s^2}z'(s)$, et donc $z'(s) = Ke^{i\arctan(s)}$ .La condition $z'(0) = 1$ donne $K = 1$. Donc $z(s) = \cos(\arctan(s)) + i\sin(\arctan(s))$.

A simplifier par la trigonométrie : si $\theta = \arctan(s)$ on a $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\tan(\theta) = s$. Or

$$\tan^2(\theta) + 1 = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\ \text{, et }\ \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

donc $\cos^2(\theta) = \frac{1}{1+s^2}$ et comme sur le domaine $\cos(\theta) \geq 0$, $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$ et $\sin(\theta) = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$. donc $z'(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} + i\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$; on peut donc prendre la primitive telle que $z(0) = i$

$$\boxed{z(s) = \arg sh\,(s) + i\sqrt{1+s^2}}$$

Si on pose $s = sh(t)$, on a donc $z = t + i\,ch(t)$ donc $y = ch(x)$. la courbe est incluse dans une chaînette.

2) sommet d'une parabole.

On remarquera que, t est homogène à une longueur et donc aussi p .

2.a)

On a $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t/p \end{pmatrix}$ donc $\frac{ds}{dt}(t) = \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t) \right\| = \frac{1}{p}\sqrt{p^2 + t^2}$. D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+p^2}}\begin{pmatrix} p \\ t \end{pmatrix}\ ,\ \overrightarrow{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+p^2}}\begin{pmatrix} -t \\ p \end{pmatrix}}$$

ces deux vecteurs sont de norme 1 .

2.b)
On dérive $\overrightarrow{T}$ par rapport à t

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}(t)=\begin{pmatrix}\frac{-pt}{(p^2+t^2)^{3/2}}\\ \frac{-t}{(t^2+p^2)^{3/2}}.t+\frac{1}{\sqrt{t^2+p^2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-pt}{(p^2+t^2)^{3/2}}\\ \frac{-t}{(t^2+p^2)^{3/2}}.t+\frac{p^2+t^2}{(t^2+p^2)^{3/2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-pt}{(p^2+t^2)^{3/2}}\\ \frac{p^2}{(p^2+t^2)^{3/2}}\end{pmatrix}=\frac{p}{p^2+t^2}\overrightarrow{N}(t)$$

d'où la courbure en utilisant $\frac{dT}{ds}=\frac{dT}{dt}\frac{dt}{ds}$

$$\boxed{c(t)=\frac{p^2}{(p^2+t^2)^{3/2}}}$$

qui est bien homogène à l'inverse d'une longueur (le rayon de courbure)
2.c)
On a donc $\frac{dc}{dt}(t)=-3p^2\frac{t}{(p^2+t^2)^{5/2}}$. La dérivée par rapport à t est donc nulle si et seulement si t est nul.

$\boxed{\text{la parabole admet un seul sommet (au sens du sujet) le point } t=0 \text{ qui est aussi le sommet au sens usuel.}}$

3) sommet d'une ellipse.
a et b sont homogènes a des longueurs . La vérification de l'homogénéité des formules et la vérification de $\frac{dT}{dt}//N$ doivent vous protéger de la grande majorité des erreurs de calcul.
Je note $S=\sin$ et $C=\cos$. On a donc $\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}aC\\ bS\end{pmatrix}$ donc en dérivant $\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}=\begin{pmatrix}-aS\\ bC\end{pmatrix}$ et $\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\|=\sqrt{a^2S^2+b^2C^2}$ soit $\overrightarrow{T}=\frac{1}{\sqrt{a^2S^2+b^2C^2}}.\begin{pmatrix}-aS\\ bC\end{pmatrix}$
et $\overrightarrow{N}=\frac{1}{\sqrt{a^2S^2+b^2C^2}}.\begin{pmatrix}-bC\\ -aS\end{pmatrix}$ (de norme 1) . Puis :

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{T}}{dt} &= \frac{-\left(a^2-b^2\right)SC}{(a^2S^2+b^2C^2)^{3/2}}.\begin{pmatrix}-aS\\ bC\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{a^2S^2+b^2C^2}}\begin{pmatrix}-aC\\ -bS\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{(a^2S^2+b^2C^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}a\left(a^2-b^2\right)S^2C-aC\left(a^2S^2+b^2C^2\right)\\ -b\left(a^2-b^2\right)SC^2-bS\left(a^2S^2+b^2C^2\right)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{(a^2S^2+b^2C^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}-ab^2C\left(S^2+C^2\right)\\ -ba^2S\left(C^2+S^2\right)\end{pmatrix}=\frac{1}{(a^2S^2+b^2C^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}-ab^2C\\ -ba^2S\end{pmatrix}\\ &= \frac{ab}{(a^2S^2+b^2C^2)}\overrightarrow{N}\end{aligned}$$

d'où comme $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}=\frac{d\overrightarrow{T}}{dt}.\frac{dt}{ds}$

$$\boxed{c=\frac{ab}{(a^2S^2+b^2C^2)^{3/2}}}$$

homogène à l'inverse d'une longueur.
et donc :

$$\frac{dc}{dt}=\frac{-3ab\left(a^2-b^2\right)SC}{(a^2S^2+b^2C^2)^{5/2}}$$

Comme $a\neq b$ la dérivée est nulle si et seulement si $\sin(t)=0$ ou $\cos(t)=0$. donc $t=0[\pi/2]$
Remarque : Si $a=b$ on retrouve le cas du cercle où tous les points sont des sommets .

$\boxed{\text{l'ellipse admet quatre sommets (au sens du sujet) qui sont aussi les sommets au sens usuel.}}$

4.a) figure 1
La courbe étant C^3 la fonction Y est C^3 et donc continue . Le théorème de Rolle permet donc de dire que comme Y change de signe sur $[u,v]$, Y admet une racine sur $[u,v]$.
Par hypothèse s_1,s_2,w sont deux à deux distincts et situés strictement sur la même période de M . Les trois points sont deux à deux distincts et alignés sur la droite $Y=0$.
Notons A,B,C ces trois points avec une notation telle que $B\in]A,C[$.

- Soit la tangente en B partage le plan en deux demi plans ouverts , l'un contenant A l'autre C . Ce qui contredit l'hypothèse que la courbe reste incluse dans un seul demi plan ouvert. . D'où l'absurdité.
- Soit la tangente est la droite ABC ce qui contredit la convexité stricte.

4.b) figure 2
D'après l'absurdité précédente, la courbe pour $s \in]s1, s2[$ est donc située dans l'un des demis plans ouverts défini par la droite $M(s_1)M(s_2)$. en remplaçant s_1 par s_2 et s_2 par $s_1 + L$ on a le même résultat. Reste à prouver que les deux demis plans sont distincts. Par l'absurde supposant que la courbe sur $]s_1, s_2[$ et sur $]s_2, s_2 + L[$ soit dans le même demi plan (par exemple $Y > 0$) .
On a alors que Y est minimum en s_2 et donc comme la fonction est C^1 on a $Y'(s_2) = 0$. Comme la courbe est régulière $X'(s_2) \neq 0$ et la tangente en $M(s_2)$ est donc la droite $Y = 0$. Elle passe par $M(s_1) \neq M(s_2)$ ce qui contredit la stricte convexité.

$\boxed{\text{chaque corde } M(s_1)M(s_2) \text{ partage le plan en demi plans ouverts contenant chacun un arc de courbe } s_1 < s < s_2 \text{ ou } s_2 < s <}$

5.a)
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment . On peut l'appliquer au segment $[O, L]$ avec la fonction continue Y. Il existe un minimum atteint en un point noté s_1 et un maximum en un point noté s_2 .
La fonction étant C^1 la dérivée aux extrémums est nulle. Donc

$$\boxed{\text{il existe au moins deux sommets } M(s_1) \text{ et } M(s_2)}$$

5.b)
sur $[s_1, s_2]$ la dérivée est de signe constant (par hypothèse il n'y a pas d'autre racines , donc par continuité pas d'autre changement de signe) .Or on a un minimum en s_1 et un maximum en s_2 . La dérivée est donc positive sur $[s_1, s_2]$ strictement positive sur $]s_1, s_2[$. Comme on suppose aussi $Y(s) > 0$ on a $c'(s)Y(s)$ positif sur $[s_1, s_2]$, strictement positif sur $]s_1, s_2[$.
Sur $]s_2, s_1 + L[$ on a par la même étude des variations et l'hypothèse sur les racines de c' : $c'(s) < 0$. La question 4 nous donne $Y(s) < 0$. Donc sur $]s_2, s_1 + L[$ $c'(s)Y(s) > 0$.
On intègre donc une fonction continue positive , strictement positive en au moins un point donc

$$\boxed{\int_{s_1}^{s_1+L} Y(s)c'(s)ds > 0}$$

Si on intègre par parties avec les fonctions C^1 , s et Y (la classe des données ne laisse pas le choix)

$$\int_{s_1}^{s_1+L} Y(s)c'(s)ds = [Yc]_{s_1}^{s_1+L} - \int_{s_1}^{s_1+L} Y'(s)c(s)ds$$

Le morceau tout intégré est nul par période L . Prouvons que l'autre est aussi nul . On prend le repère de Frenet dans le nouveau repère :

$$\overrightarrow{T} = \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} , \overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -Y' \\ X' \end{pmatrix}$$

cY' est donc l'opposé de l'abscisse de $c\overrightarrow{N}$ de primitive $\overrightarrow{T}$. On a donc

$$\int_{s_1}^{s_1+L} Y'(s)c(s)ds = -[X']_{s_1}^{s_1+L} = 0 \text{ par période}$$

D'où l'absurdité $0 > 0$.
Si on ne suppose pas $Y(s) > 0$ sur $]s_1, s_2[$ la question 4 montre que $Y(s) < 0$ et donc ...$\int_{s_1}^{s_1+L} Y(s)c'(s)ds < 0$ d'où l'absurdité.

$$\boxed{\text{Il existe au moins un troisième sommet } M(s_3)}$$

5.c)
Supposons qu'il n'y ai que trois sommets .

- s_1 étant un minimum la dérivée est positive à droite de s_1 (et négative à gauche) donc la dérivée est positive sur $[s_1, s_3]$ et donc strictement positive sur $]s_1, s_3[$.
- s_2 étant un maximum la dérivée est positive à gauche de s_1 (et négative à droite) donc la dérivée est positive sur $[s_3, s_2]$ et donc strictement positive sur $]s_3, s_2[$.
- La dérivée s'annule en s_3 sans changer de signe.
- L'étude du 5.b reste alors valable sauf en s_3 où $c'(s)Y(s)$ est nul au lieu d'être strictement positif (ou négatif) . Il reste toujours des points où l'expression est non nulle . l'intégrale $\int_{s_1}^{s_1+L} Y'(s)c(s)ds$ est donc toujours strictement positive (négative).. Mais elle est aussi nulle d'où l'absurdité.

Si on suppose que s_3 est compris entre s_2 et $s_1 + L$ on a le même résultat en se plaçant sur $[s_2, s_2 + L]$ au lieu de $[s_1, s_1 + L]$

$$\boxed{\text{une courbe plane } C^3 \text{ périodique strictement convexe admet au moins 4 sommets.}}$$

Remarque : pour l'ellipse $M(s_1)$ est un sommet du petit axe , $M(s_2)$ un sommet du grand axe. Su l'un des arcs de courbes reliant $M(s_1)$ à $M(s_2)$ il n'y a pas d'autre sommet. Sur l'autre il y en a deux.