Devoir libre 10

Epreuve spécifique - filière PC

matrices positives et décomposition de Cholesky

MATHEMATIQUE 1

Durée : 4heures

Blague du jour

• Quel sont les deux animaux les plus intelligents ? - Le Cerf et le Veau (cerveau)

• C'est un chien qui rencontre un crocodile :
- Le crocodile dit au chien : Salut, sac à puces !
- Et le chien lui répond : Salut, sac à main !

John Wallis (1616-1703)

Mathématicien anglais. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie. Il a été l'un des fondateurs de la Royal Society. Ses travaux concernent principalement le calcul différentiel et intégral. On lui doit le symbole de l'infini ∞.

Mathématicien du jour

Énoncé : CCP 2003, PSI

Notations

Soit n et p des entiers supérieurs ou égaux à 1. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ ayant n lignes et p colonnes. Lorsque $p=n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et est muni de sa structure d'algèbre, I_n représentant la matrice identité.

$GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Tout vecteur $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ est identifié à un élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de X soit x_i. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui lui est associé.

Pour $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $X=(x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{R}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AX.

Selon le contexte, 0 désigne soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $<\cdot\mid\cdot>$ et de la norme associée notée $||\cdot||$.

Une matrice symétrique S de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX\geq 0$ et définie positive si et seulement si : $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, ${}^tXSX>0$

.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.

Partie I

I.1 Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^2$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Etablir les égalités :

a) ${}^tXY = {}^tYX$.

b) $({}^tXY)^2 = {}^tX(Y{}^tY)X = {}^tY(X{}^tX)Y$.

c) ${}^tXSY = < X \mid SY > = < SX \mid Y >$.

I.2 Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\forall (S_1,S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$, $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

b) $\forall (S_1,S_2) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

c) $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.3 **a)** Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXSX = 0$. Montrer que toute valeur propre de S est nulle et en déduire $S = 0$.

b) Donner un exemple de matrice carrée M d'ordre 3, non nulle et vérifiant :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ , \ {}^tXMX = 0$$

I.4 **a)** Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

b) Que peut-on dire d'une matrice symétrique réelle semblable à une matrice symétrique réelle positive ?

I.5 On munit $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des relations notées $\geq$ et $>$, définies respectivement par :

$$\forall (S_1,S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \ , \ (S_1 \geq S_2 \Longleftrightarrow S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))$$

et

$$\forall (S_1,S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 \ , \ (S_1 > S_2 \Longleftrightarrow S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}))$$

a) Montrer que la relation $\geq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que pour $n \geq 2$, cet ordre n'est pas total sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

c) La relation $>$ est-elle une relation d'ordre ?

d) Trouver un exemple dans $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ montrant que $S_1 \geq S_2$ et $S_1 \neq S_2$ n'implique pas nécessairement $S_1 > S_2$.

I.6 Soit u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ diagonalisables et vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.

b) Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u et $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres de u respectivement associés. Pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_{λ_i} induit par v. Montrer que pour tout $i \in \{1,2,\ldots,p\}$ il existe une base $\mathcal{B}_i$ de E_{λ_i} formée de vecteurs propres de v. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que les matrices de u et v dans cette base soient toutes deux diagonales.

Former pour réussir

.

I.7 **a)** Soit A et B deux matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage.

b) On donne les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage et déterminer explicitement une telle matrice de passage.

I.8 Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1S_2 = S_2S_1$. Montrer que $S_1S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

I.9 **a)** Soit $(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $S_1S_2 = S_2S_1$. Montrer que :

$$S_2 \geq S_1 \geq 0 \Longrightarrow S_2^2 \geq S_1^2$$

b) Montrer que les matrices $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ vérifient $S_2 \geq S_1 \geq 0$. Vérifient-elles $S_2^2 \geq S_1^2$?

Partie II

On se propose dans cette partie de caractériser de diverses manières la définie positivité d'une matrice symétrique réelle.

II.1 Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

a) S est définie positive.

b) Toutes les valeurs propres de S sont strictement positives.

c) Il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tMM$.

d) S est positive et inversible.

II.2 Soit A_n et B_n les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ données par :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_n = 2I_n - B_n$$

a) Montrer que pour tout vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$:

$$ {}^tXA_nX = x_1^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 + x_n^2$$

.

b) En déduire que A_n est définie positive.

c) En cherchant une matrice M_n de la forme :

$$M_n = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1} & v_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & u_n \end{pmatrix} \quad , \quad u_i, v_i \in \mathbb{R}$$

déterminer explicitement une matrice M_n inversible telle que $A_n = {}^tM_nM_n$.

II.3 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $S = {}^tMM$. On note $\mathcal{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$ la famille des vecteurs colonnes de M. Pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $p_i(x)$ la projection orthogonale de x sur Vect$(U_1, U_2, \dots, U_i)$.

a) Justifier que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b) On définit la famille de vecteurs $\mathcal{V} = (V_1, V_2, \dots, V_n)$ par les relations :

$$V_1 = U_1 \text{ et } \forall i \in \{2, \dots, n\}\ ,\ V_i = U_i - p_{i-1}(U_i)$$

Montrer que la famille $\mathcal{V}$ est orthogonale et que c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit $\mathcal{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)$ la famille de vecteurs définie par $W_i = \dfrac{1}{||V_i||}V_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\mathcal{W}$ est alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la matrice de passage de la base $\mathcal{W}$ à la base $\mathcal{U}$ est triangulaire supérieure.

d) Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la la base $\mathcal{W}$. Montrer que M peut s'écrire sous la forme $M = PT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et qu'alors $S = {}^tTT$.

e) Montrer que la matrice $S = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de la forme $S = {}^tTT$ où T est une matrice triangulaire supérieure inversible et en déduire que S est symétrique définie positive.

II.4 a) Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Déterminer $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que ${}^tXA_0X = 0$.

b) Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est définie positive si et seulement si $(\text{Tr}\, A > 0 \text{ et } \det A > 0)$ ce qui équivaut encore à $(a > 0 \text{ et } ab - c^2 > 0)$.

c) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$. On décompose S sous la forme

$$S = \begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & S' \end{pmatrix} \ ,\ a \in \mathbb{R}\ ,\ V \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})\ ,\ S' \in \mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{R})$$

.

En écrivant $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$, montrer que pour $a \neq 0$:

$$ {}^tXSX = a\left[\left(x + \frac{1}{a}{}^tVX'\right)^2 + \frac{1}{a^2}{}^tX'(aS' - V{}^tV)X'\right] \tag{1} $$

et en déduire que S est définie positive si et seulement si ($a > 0$ et $aS' - V^tV$ est définie positive).

d) En gardant les notations de la question **II.4 c)** précédente, on peut alors construire par récurrence une suite de nombres réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et une suite de matrices $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ comme suit. On pose d'abord :

$$ S_1 = S \ , \ a_1 = a \ , \ V_1 = V \ , \ S_1' = S' \ , \ S_2 = a_1 S_1' - V_1{}^tV_1 $$

Si $n \geq 3$, on décompose S_2 sous la forme

$$ S_2 = \begin{pmatrix} a_2 & {}^tV_2 \\ V_2 & S_2' \end{pmatrix} \ , \ a_2 \in \mathbb{R} \ , \ V_2 \in \mathcal{M}_{n-2,1}(\mathbb{R}) \ , \ S_2' \in \mathcal{S}_{n-2}(\mathbb{R}) $$

On pose à nouveau $S_3 = a_2 S_2' - V_2{}^tV_2$ et on itère le processus précédent. On obtient ainsi une suite de matrices symétriques réelles $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ où S_i est d'ordre $n - i + 1$ et une suites de réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ liés par les relations :

$$ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \ , \ S_i = \begin{pmatrix} a_i & {}^tV_i \\ V_i & S_i' \end{pmatrix} \ , \ S_{i+1} = a_i S_i' - V_i{}^tV_i $$

Le processus s'arrête pour $i = n$ car S_n est alors d'ordre 1 et on note $S_n = (a_n)$.

Montrer que S est définie positive si et seulement si tous les réels de la suite $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont strictement positifs.

e) Soit $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. Selon les notations précédentes, déterminer explicitement les réels a_1, a_2, a_3 associés à cette matrice S et en déduire que S est définie positive si et seulement si :

$$ a > 0 \ , \ \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0 \ \text{ et } \ \begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0 $$

Á la prochaine