◘ Corrigé Exericie 1, Pr. Dufait

1. (i) $t \mapsto M(t)$ est C^1 sur $[-\pi, \pi]$ et $\forall t \in [-\pi, \pi]$, $M'(t) = \begin{pmatrix} -5\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ donc la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est la droite d'équation $\begin{vmatrix} x - 5\cos t & -5\sin t \\ y - 3\sin t & 3\cos t \end{vmatrix} = 0$ soit $\underline{(T_t): \quad 3\cos t\, x + 5\sin t\, y = 15}$.

(ii) On remarque que $O \notin T_t$ donc, pour tout $P \in T_t$, la droite (OP) existe dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$. Le point P est solution si et seulement si $P \in T_t$ et $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{T_t}$ c'est à dire si et seulement si P est le projeté orthogonal de O sur T_t. D'où l'existence et l'unicité de P .

(iii) À un sommet S de $\mathcal{E}$, la tangente à $\mathcal{E}$ est orthogonale à l'axe (OS). Comme S appartient à cette tangente, si S est un sommet alors $P = S$.

(iv) $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$ est orthogonal à T_t donc colinéaire à $\begin{pmatrix} 3\cos t \\ 5\sin t \end{pmatrix}$ donc il existe $\lambda_t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} = \lambda_t \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 5\sin t \end{pmatrix}$ et, d'autre part, $P \in T_t$ donc $3\cos t\, X(t) + 5\sin t\, Y(t) = 15$. On obtient $\lambda_t \left(9\cos^2 t + 25\sin^2 t\right) = 15$ soit $\lambda_t = \dfrac{15}{9\cos^2 t + 25\sin^2 t} = \dfrac{15}{9 + 16\sin^2 t}$. Donc $\underline{\begin{cases} X(t) = \dfrac{45\cos t}{9 + 16\sin^2 t} \\ Y(t) = \dfrac{75\sin t}{9 + 16\sin^2 t} \end{cases}}$

2. (i) On a immédiatement :

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$X'(t)$	0	$-$	
$X(t)$	1	$\searrow$	0

(ii) ◇ $\left(t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } Y'(t) = 0\right) \sin t = \frac{3}{4}$ donc $\underline{\exists! \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, Y'(\alpha) = 0 \text{ et on a } \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right)}$.

◇ $\sin^2 \alpha = \frac{9}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16}$, $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$ donc $\sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}$ et $\sin^2$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\underline{\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}}$.

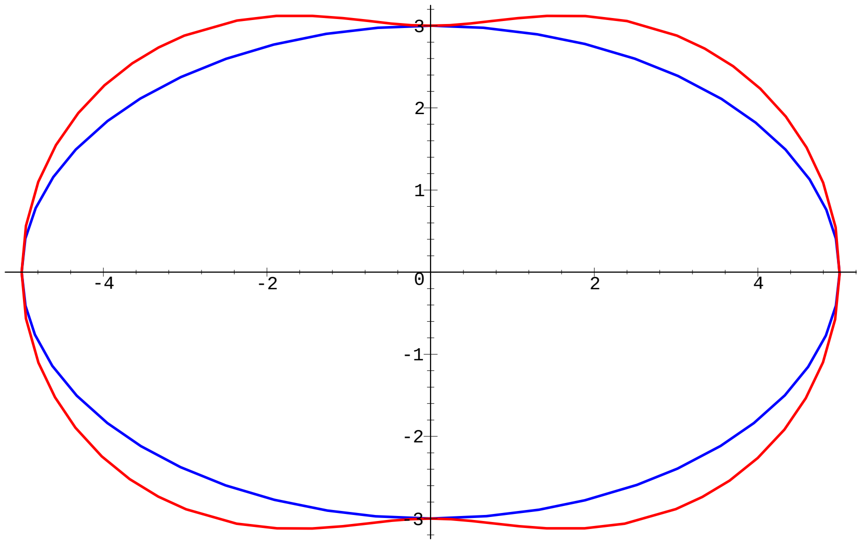
◇ On a $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ et $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ d'où $\underline{\begin{cases} X(\alpha) = \frac{5}{8}\sqrt{7} \\ Y(\alpha) = \frac{25}{8} \end{cases}}$

(iii) On a donc :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$Y'(t)$		$+$	0	$-$	0
$Y(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	3

3. On a $\begin{cases} X(t+\pi) = -X(t) \\ Y(t+\pi) = -Y(t) \end{cases}$ et $\begin{cases} X(-t) = X(t) \\ Y(-t) = -Y(t) \end{cases}$ donc il suffit d'étudier l'arc $t \longmapsto P_t$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis de le compléter par une symétrie par rapport à O et une une symétrie orthogonale par rapport à $\left(O, \vec{\imath}\right)$.

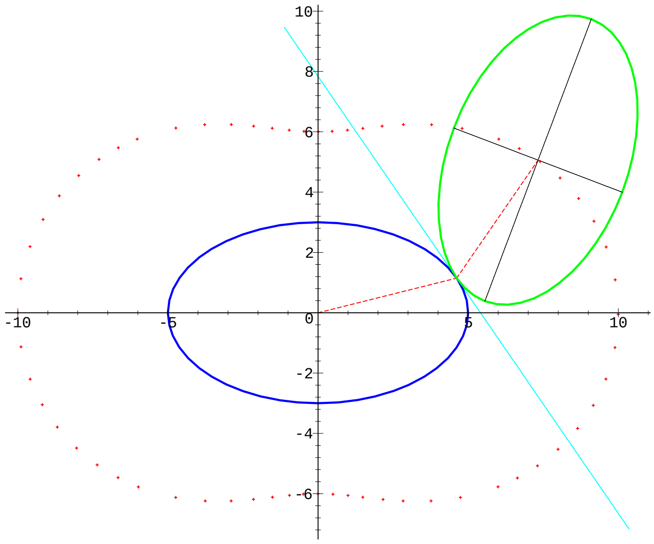
.



4. QUESTION HORS PROGRAMME

Notons S le sommet $S = O + \vec{\imath}$ de $\mathcal{E}$. À l'instant $\theta = 0$, il coïncide avec le sommet S' de $\mathcal{E}'$. La condition de roulement sans glissement est qu'à l'instant θ les deux ellipses sont en contact en $M \in \mathcal{E}$ et $M' \in \mathcal{E}'$ tels que la longueur de l'arc $\widehat{SM}$ soit égale à celle de l'arc $\widehat{S'M'}$. Si on prend comme paramétrage de $\mathcal{E}'$ celui obtenu par la translation τ, c'est à dire, par exemple, que $S' = M'(\pi)$, on a donc que, si à l'instant θ le contact a lieu en $M(t)$ sur $\mathcal{E}$ alors il a lieu en $M'(\pi - t)$ sur $\mathcal{E}'$. Le point $M(\pi - t)$ étant symétrique du point $M(t)$ pra rapport à $\left(O, \vec{\jmath}\right)$, l'angle entre les droites $(OM(\pi - t))$ et $T_{\pi-t}$ est l'opposé, modulo π, de l'angle entre les droites $(OM(t))$ et T_t. D'autre part, c'est aussi l'angle entre les droites $(O'M'(\pi - t))$ et $T'_{\pi-t}$. Comme $T_t = T'_{\pi-t}$ à l'instant θ, le droites $(OM(t))$ et $(O'M'(\pi - t))$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à T_t, donc en particulier, O' est, à l'instant θ, le symétrique de O par rapport à T_t. On a donc $\overrightarrow{OO'} = 2\,\overrightarrow{OP}$ et donc le lieu de O' est l'image de $\mathcal{F}$ par l'homothétie de centre O et rapport 2 .

ILLUSTRATION :



◙ Corrigé Exericie 2, Mma Gayout

1) a) Un vecteur normal au plan (P) est $\vec{n}(1, 1, 1)$ et un vecteur normal au plan (Q) est $\vec{m}(-1, 1, 0)$.
On a : $\vec{n}.\vec{m} = 0$. Donc les plans (P) et (Q) sont orthogonaux.

b) On prend $\vec{\mathrm{I}}(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$, $\vec{\mathrm{J}}(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ et $\vec{\mathrm{K}} = \vec{\mathrm{I}} \wedge \vec{\mathrm{J}}$, soit $\vec{\mathrm{K}}(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$.

c) D'après les formules de changement de bases, en notant P la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à la base $(\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}}, \vec{\mathrm{K}})$, on a : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathrm{P}\times\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{X} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{Z} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{X} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{Y} + \frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{Z} \\ z = \frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{X} - 2\times\frac{\sqrt{6}}{6}\mathrm{Z} \end{cases}$ et on a aussi :

$\begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix} = {}^t\mathrm{P}\times\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} \mathrm{X} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + y + z) \\ \mathrm{Y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ \mathrm{Z} = \frac{\sqrt{6}}{6}(x + y - 2z) \end{cases}$.

Donc $(x + y + z)^2 = 3\,\mathrm{X}^2$, $(-x + y)^2 = 2\,\mathrm{Y}^2$ et $(2y + z)^2 = (\sqrt{3}\,\mathrm{X} - \sqrt{2}\,\mathrm{Y})^2$.
Une équation de (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$ est donc : $3\alpha^2\mathrm{X}^2 + 2\beta^2\mathrm{Y}^2 + \gamma^2(\sqrt{3}\,\mathrm{X} - \sqrt{2}\,\mathrm{Y})^2 = 1$.

d) On en déduit que (Σ) est un cylindre d'axe dirigé par le vecteur $\vec{\mathrm{K}}$.

2) $(\mathcal{E})$ a pour équation : $3\alpha^2\mathrm{X}^2 + 2\beta^2\mathrm{Y}^2 + \gamma^2(\sqrt{3}\,\mathrm{X} - \sqrt{2}\,\mathrm{Y})^2 = 1$, soit
$3(\alpha^2 + \gamma^2)\mathrm{X}^2 - 2\gamma^2\sqrt{6}\,\mathrm{XY} + 2(\beta^2 + \gamma^2)\mathrm{Y}^2 = 1$.
La matrice associée à la forme quadratique $q(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 3(\alpha^2 + \gamma^2)\mathrm{X}^2 - 2\gamma^2\sqrt{6}\,\mathrm{XY} + 2(\beta^2 + \gamma^2)\mathrm{Y}^2$
est : $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3(\alpha^2 + \gamma^2) & -\sqrt{6}\gamma^2 \\ -\sqrt{6}\gamma^2 & 2(\beta^2 + \gamma^2) \end{pmatrix}$.
Par le théorème spectral, on sait que M admet deux valeurs propres réelles, que les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres sont orthogonaux et que M est diagonalisable dans une base orthonormale $(\vec{\mathrm{I}}', \vec{\mathrm{J}}')$ constituée de vecteurs propres.
Après calculs, on trouve comme valeurs propres : $a' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 + \sqrt{\theta})$
et $b' = \frac{1}{2}(3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 - \sqrt{\theta})$ où $\theta = 9\alpha^4 + 4\beta^4 + 25\gamma^4 - 12\alpha^2\beta^2 - 4\beta^2\gamma^2 + 6\alpha^2\gamma^2$.
Un vecteur propre associé à a' est $\vec{\mathrm{U}}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - a')$ et un vecteur propre associé à b' est $\vec{\mathrm{V}}(\sqrt{6}\gamma^2, 3(\alpha^2 + \gamma^2) - b')$ dans la base $(\vec{\mathrm{I}}, \vec{\mathrm{J}})$.
On pose : $\vec{\mathrm{I}}' = \frac{1}{\|\vec{\mathrm{U}}\|}\vec{\mathrm{U}}$ et $\vec{\mathrm{J}}' = \frac{1}{\|\vec{\mathrm{V}}\|}\vec{\mathrm{V}}$. On sait de plus que : $a' + b' = \mathrm{Tr(M)} = 3\alpha^2 + 2\beta^2 + 5\gamma^2 > 0$
et que $a'b' = \det(\mathrm{M}) = 6(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) > 0$. Donc on a : $0 < b' < a'$.
Dans la repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\mathrm{I}}', \vec{\mathrm{J}}')$, $(\mathcal{E})$ a pour équation réduite : $a'\mathrm{X}'^2 + b'\mathrm{Y}'^2 = 1$.
$(\mathcal{E})$ est donc une ellipse et (Σ) un cylindre elliptique.

On pose $\vec{K}' = \vec{K}$, $a = \dfrac{1}{\sqrt{a'}}$ et $b = \dfrac{1}{\sqrt{b'}}$. On a : $0 < a < b$ et l'équation de (Σ) dans le repère orthonormal $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ est alors : $\dfrac{X'^2}{a^2} + \dfrac{Y'^2}{b^2} = 1$.

3) a) On a :

$$(*)\quad \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}X'^2 - \frac{1}{b^2}Z'^2 = \left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right).$$

Soit $M \in (C_k)$; alors ses coordonnées (X', Y', Z') dans le repère $\mathcal{R}''$ vérifient :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1 \text{ et } \frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

Donc, en remplaçant dans (*), on obtient (**) : $1 - \dfrac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = k\left(\dfrac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \dfrac{Z'}{b}\right)$, soit

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{a}X' + kb\,Z' = b^2, \text{ soit } \boxed{\left(X' + \frac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{2a}\right)^2 + Y'^2 + \left(Z' + \frac{kb}{2}\right)^2 = \frac{b^2(k^2b^2 + 4a^2)}{4a^2}}.$$

Donc M appartient aussi à la sphère (S_k) de centre Ω_k de coordonnées $\left(-\dfrac{kb\sqrt{b^2 - a^2}}{2a}, 0, -\dfrac{kb}{2}\right)$ dans le repère $\mathcal{R}''$ et de rayon $R_k = \dfrac{b\sqrt{k^2b^2 + 4a^2}}{2a}$.

Réciproquement, si $M \in (S_k) \cap (P_k)$, on a la relation (**) et $\dfrac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \dfrac{Z'}{b} = k$, d'où :

$$1 - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2) = \left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b}\right)\left(\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} + \frac{Z'}{b}\right) = \frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2), \text{ donc}$$

$\dfrac{X'^2}{a^2} + \dfrac{Y'^2}{b^2} = 1$. Donc $M \in (\Sigma)$. D'où l'égalité : $\boxed{(C_k) = (P_k) \cap (\Sigma) = (P_k) \cap (S_k)}$.

b) En tant qu'intersection d'un plan et d'une sphère, (C_k) est soit vide, soit un point, soit un cercle.
C'est un cercle ssi la distance d de Ω_k au plan (P_k) est strictement inférieure à R_k.

Dans ce cas, d'après le théorème de Pythagore, le rayon de (C_k), noté r_k,est égal à : $\sqrt{R_k^2 - d^2}$.

On a : $R_k = \dfrac{b\sqrt{k^2b^2 + 4a^2}}{2a}$ et $d = d(\Omega_k, (P_k)) = \dfrac{\left|-\dfrac{k(b^2 - a^2)}{2a^2} + \dfrac{k}{2} - k\right|}{\sqrt{\dfrac{b^2 - a^2}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^2}}} = \dfrac{kb^2}{2a}$.

D'où $R_k - d = \dfrac{b}{2a}\left(\sqrt{k^2b^2 + 4a^2} - kb\right) > 0$ car $a > 0$. $\boxed{\text{Donc } (C_k) \text{ est un cercle de rayon } r_k = b}$.

c) $\boxed{\text{Le rayon du cercle } (C_k) \text{ est égal à la demi-longueur du grand axe de l'ellipse } (\mathcal{E})}$.

On pouvait le prévoir puisque l'ellipse $(\mathcal{E})$ est l'image du cercle (C_k) par la projection orthogonale sur le plan d'équation Z' = 0.

Or, (C_k) est inclus dans le plan (P_k) dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{J}'$ aussi vecteur directeur du plan Z' = 0. Donc un diamètre de (C_k) dirigé selon $\vec{J}'$ a sa longueur inchangée par la projection orthogonale considérée.