Devoir Libre

11 Coniques-Quadriques

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?
- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon

Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien du jour

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.
Son nom est lié à la suite de matrices (H_{2^k}) définie de la façon suivante : $H_1 = (1), H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$. Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Exercice 1 : Extrait e3a 2009, MP

On considère trois réels α, β et γ non nuls et la quadrique (Σ) dont une équation est :

$$\alpha^2 (x + y + z)^2 + \beta^2 (-x + y)^2 + \gamma^2 (2y + z)^2 = 1$$

dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace affine de dimension trois.

1) **a)** Montrer que les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + y + z = 0$ et $-x + y = 0$ sont orthogonaux.

b) On note $\vec{I}$ et $\vec{J}$ les deux vecteurs unitaires, d'abscisses positives, normaux respectivement aux plans (P) et (Q). Déterminer les vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ ainsi que le vecteur $\vec{K}$ tel que le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ soit orthonormé direct.

c) Déterminer une équation de la quadrique (Σ) dans le repère $\mathcal{R}'$.
On notera X, Y et Z les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}'$.

d) Que peut-on dire de la nature de la quadrique (Σ) ?

.

2) On note $(\mathcal{E})$ la conique obtenue comme intersection de la quadrique (Σ) avec le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $\mathcal{R}'$.

Réduire l'équation de la conique $(\mathcal{E})$. En déduire qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}'' = (O, \vec{I}', \vec{J}', \vec{K}')$ tel que l'équation dans le repère $\mathcal{R}''$ de la quadrique (Σ) soit de la forme :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} = 1$$

avec $0 < a < b$. Les coordonnées d'un point M dans le repère $\mathcal{R}''$ sont notées X', Y' et Z'.

3) Soit k un réel quelconque ; on appelle (P_k) le plan dont une équation dans le repère $\mathcal{R}''$ est :

$$\frac{X'\sqrt{b^2 - a^2}}{ab} - \frac{Z'}{b} = k.$$

a) En considérant l'expression :

$$\frac{X'^2}{a^2} + \frac{Y'^2}{b^2} - \frac{1}{b^2}(X'^2 + Y'^2 + Z'^2)$$

montrer que l'intersection (C_k) du plan (P_k) et de la quadrique (Σ) est l'intersection du plan (P_k) avec une sphère (S_k) dont on précisera le centre Ω_k et le rayon R_k.

b) Montrer que l'ensemble (C_k) est un cercle dont on précisera le rayon.

c) Que peut-on dire du rayon du cercle (C_k) ? Pouvait-on le prévoir ?

Exercice 2 : Extrait e3a 2004, MP

On note $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $(3,3)$ à coefficients réels, et I la matrice identité de $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. Une matrice symétrique dont toutes les valeurs propres sont strictement positives est dite **définie positive**.
Pour $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{E}(A)$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$$\mathcal{E}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ||Ax|| = 1\}.$$

1. Soit P dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que P est une matrice orthogonale. Déterminer $\mathcal{E}(P)$.

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ des réels tous non nuls. Soit D la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $\mathcal{E}(D)$ est un ellipsoïde.

3 Soit A dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose A **inversible**.

(i) Justifier que ${}^tAA$ est une matrice symétrique définie positive.

(ii) En déduire qu'il existe une matrice diagonale D, avec des coefficients diagonaux strictement positifs, et une matrice orthogonale P telles que

$${}^tAA = {}^tPD^2P.$$

(iii) On pose $S = {}^tPDP$. Démontrer que S est une matrice symétrique définie positive.

(iv) Montrer alors qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $A = QS$.

(v) En déduire que $\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(S)$.

(vi) Démontrer que $\mathcal{E}(A)$ est un ellipsoïde.

4 Soient S et S' dans $\mathbb{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que S et S' sont des matrices **symétriques définies positives** et que $\mathcal{E}(S) = \mathcal{E}(S')$.

(i) Soit v un vecteur non nul. En considérant le vecteur $v/\|S(v)\|$, démontrer que $\|S(v)\| = \|S'(v)\|$.

(ii) En déduire que :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \forall w \in \mathbb{R}^3, \;\; < S(v), S(w) > = < S'(v), S'(w) > .$$

On pourra commencer par exprimer le produit scalaire de deux vecteurs x et y en fonction des normes des vecteurs $x+y$ et $x-y$.

(iii) En déduire que $S^2 = S'^2$.

(iv) Soit α une valeur propre de S. A l'aide d'un théorème dont on rappellera l'énoncé, montrer que $\ker(S - \alpha I) \oplus \ker(S + \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$. En déduire que $\ker(S - \alpha I) = \ker(S^2 - \alpha^2 I)$.

Fin

✉ : mamouni.myismail@gmail.com