

PROBLÈMES CORRIGÉS MP

Corrigé Devoir Libre
 Ordre sur les matrices symétriques

PR. DEBARBIEUX

Blague du jour

Les types d'ingénieurs en informatique sont :

- L'ingénieur DISQUE DUR : il se rappelle tout, POUR TOUJOURS.
- L'ingénieur CD-ROM : il va toujours plus vite avec le temps.
- L'ingénieur RAM : il oublie tout de vous, dès le moment où vous lui tournez le dos.



Hermann Minkowski (1864 - 1909)

Mathématicien et un physicien théoricien allemand. On lui doit surtout l'espace à 4 dimension (espace-temps) appelé de Minkowski, considéré comme la base de tous les travaux sur la théorie de la relativité. Son travail le plus original est sans aucun doute sa géométrie des nombres. Ces travaux posent de nombreuses questions sur le gain de place, ou comment faire rentrer une forme donnée à l'intérieur d'une autre forme donnée.

Mathématicien du jour

PARTIE 1

1a) Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = (y_i)_{i=1}^n$ sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a

$${}^tXY = {}^tYX = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

1b) Développement sans problème :

$$\begin{aligned} ({}^tXY)^2 &= ({}^tXY)({}^tXY) = ({}^tXY)({}^tYX) \text{ calcul précédent} \\ &= ({}^tX)(Y^tY)(X) \text{ par associativité} \\ &= ({}^tYX)({}^tXY) = {}^tY(X^tX)Y \text{ symétriquement} \end{aligned}$$

1c) Si on considère que " ${}^tXY = \langle x, y \rangle$ dans une base orthonormée"

n'est pas un formule classique on refait le calcul et

$${}^tX(SY) = \sum_{(i,j)} x_i s_{i,j} y_j = \langle X, SY \rangle$$

puis comme S est symétrique ${}^tX(SY) = {}^tX^tSY = {}^t(SX)Y = \langle SX, Y \rangle$

2a) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXS_1X \geq 0$ et ${}^tXS_2X \geq 0$ et donc en ajoutant ${}^tX(S_1 + S_2)X \geq 0$

$$(S_1, S_2) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}))^2 \Rightarrow S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

2b) idem car la somme d'un réel positif et d'un réel strictement positif est un réel strictement positif.

2c) On a : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tX({}^tAA)X = (AX)(AX) =$

$\langle AX, AX \rangle = \|AX\|^2 \geq 0$. Et donc

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

3a) Si $SX = \lambda X$ on a ${}^tXSX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$. Donc si ${}^tXSX = 0$ on a $\lambda = 0$ (car X est non nul donc $\|X\| \neq 0$)

S est donc une matrice diagonalisable (car symétrique réelle) ayant une unique valeur propre 0 . S est donc la matrice nulle : $S = P \cdot 0 \cdot P^{-1} = (0)$

3b) On veut que MX soit orthogonal à X pour tout X . c'est une propriété classique du produit vectoriel. Il suffit de prendre pour M la matrice de $x \rightarrow i \wedge x$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors bien ${}^tXMX = 0$

4a) S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = \text{diag}(\lambda_k)$ telle que $\forall k, SV_k = \lambda_k V_k$

Si toutes les valeurs propres sont positives on a alors pour toute

matrice colonne $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^tXSX = \langle X, SX \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 \geq 0$$

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X un vecteur propre associé. le calcul du **3a** donne ${}^tXSX = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose ${}^tXSX \geq 0$ et que $X \neq \vec{0}$ on a bien $\lambda \geq 0$

4b) deux matrices semblables ont même spectre. Donc si S' est symétrique réelle semblable à S symétrique positive les valeurs propres de S (donc de S') sont toutes positives donc S' est positive.

5a) Sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ la relation \geq est bien :

- ☞ binaire
- ☞ réflexive : $(0)_n$ est bien positive donc $S_1 \geq S_1$
- ☞ antisymétrique : si $S_1 \geq S_2$ et si $S_2 \geq S_1$ les valeurs propres de $S_2 - S_1$ sont toutes à la fois positives et négatives. $S_2 - S_1$ est donc diagonalisable (car symétrique réel) ayant une seule valeur propre 0 donc c'est la matrice nulle. $S_2 = S_1$
- ☞ transitive : Si $S_1 \geq S_2$ et $S_2 \geq S_3$ on a $S_1 - S_2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $S_2 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc d'après **2a** la somme $S_1 - S_3 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $S_1 \geq S_3$.

5b) il suffit de prendre $S_1 = 0$ et pour S_2 une matrice symétrique ayant une valeur propre positive et une négative. Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5c) la relation $>$ n'est pas réflexive car $(0)_n \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

5d) On peut se douter (ou montrer) qu'une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ a des valeurs propres strictement positives.

On prend donc $S_2 = 0$ et S_1 symétrique ayant des valeurs propres positives et ayant la valeur propre 0 . Par exemple $S_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ On a } S_1 \neq (0) \text{ } {}^tXS_1X = z^2 \geq 0 \text{ et si } X = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ {}^tXS_1X = 0$$

6a) question de cours. On doit montrer $x \in E_\lambda(u) \Rightarrow v(x) \in E_\lambda(u)$

. Donc $u(x) = \lambda x \Rightarrow u(v(x)) = \lambda v(x)$. Or

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= (u \circ v)(x) \\ &= (v \circ u)(x) \text{ par hypothèse sur } u \text{ et } v \\ &= v(u(x)) = v(\lambda(x)) \\ &= \lambda v(x) \text{ par linéarité de } v \end{aligned}$$

6b) L'endomorphisme induit par v diagonalisable sur un sous espace stable est lui même diagonalisable. Donc l'endomorphisme v_i est diagonalisable et il existe une base de $E_{\lambda_i}(u)$ qui est une base de vecteurs propres de v_i . u étant diagonalisable E est somme directe des sous espaces propres. L'union des bases précédente est donc une base de E . Par construction ces vecteurs sont des vecteurs propres de v et de u (car éléments des sous espaces propres). Dans cette base u et v sont donc simultanément diagonalisables.

7a) Si A et B commutent A et B sont diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage. On prend la question précédente avec $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(v)$. P est alors la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} .

Réciproquement si A et B son diagonalisables au moyen d'une même matrice de passage. On a $A = PDP^{-1}$, $B = P\Delta P^{-1}$ et comme deux matrices diagonales commutent $AB = BA = P(D\Delta)P^{-1}$

7b)

A est de rang 1 et $E_0(A)$ est le plan $(x + y - z = 0)$. Par la trace on en déduit que la troisième valeur propre est 3 puis on trouve

$$E_3(A) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour B le calcul du polynôme caractéristique en commençant par exemple par faire $C_2 + C_3 \rightarrow C_3$ donne deux valeurs propres

4(double) et 1(simple). Puis le calcul des sous espaces propres

donne : $E_4(B)$ est le plan $-2x + y - z = 0$ et $E_1(B) = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

. On vérifie alors que $E_1(B) \subset E_0(A)$, $E_3(A) \subset E_4(B)$. Les trois droites $E_1(B)$, $E_3(A)$, $E_0(A) \cap E_4(B)$ sont trois droites de vecteurs propres communs qui engendrent l'espace. Une matrice de passage est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

remarque : je ne pense pas que le passage par l'endomorphisme induit par v sur $E_0(A)$ soit plus simple

8) S_1 et S_2 sont diagonalisables (symétriques réels), et commutent. S_1 et S_2 sont donc diagonalisables avec une même matrice de passage ($S_1 = PDP^{-1}$, $S_2 = P\Delta P^{-1}$). Cette matrice de passage diagonalise aussi $S_1S_2 = S_2S_1 = P(D\Delta)P^{-1}$, la matrice diagonale semblable à S_1S_2 étant le produit des deux matrices semblables à S_1 et S_2 . S_1 et S_2 étant positives ont toutes leurs valeurs propres positives. Les valeurs propres de S_1S_2 sont donc aussi toutes positives et S_1S_2 est symétrique positive. (toujours **4a**)

9a) Avec les notations précédentes ($S_1 = PDP^{-1}$, $S_2 = P\Delta P^{-1}$). On donc $\Delta - D$ positives. Donc pour les termes diagonaux $\delta_i - d_i \geq 0$ et $d_i \geq 0$. La fonction carrée est croissante sur \mathbb{R}^+ donc $\forall i, \delta_i^2 \geq d_i^2$. $\Delta^2 - D^2$ est donc positive et $S_2^2 - S_1^2$ est une matrice symétrique semblable à une matrice symétrique positive donc est aussi positive. $S_2^2 \geq S_1^2$ (cf **4b**)

9b) On a $S_2 - S_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 0 et 5/2 réels

positifs. La matrice est positive est $S_2 \geq S_1$
 S_1 de valeurs propres 0 et 1 donc $S_1 \geq 0$
 et $S_2^2 - S_1^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ de déterminant $-9/4$. Le produit des
 valeurs est négatif. L'une des valeurs propres est négative. $S_2^2 - S_1^2$
 n'est pas positive.

Partie II

1)

a \Leftrightarrow **b** : idem I4a

S étant symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormée $(V_i)_{i=1}^n$: il existe $D = \text{diag}(\lambda_k)$ telle que $\forall k, SV_k = \lambda_k V_k$
 Si toutes les valeurs propres sont strictement positives on a alors

pour toute matrice colonne non nulle $X = \sum_{k=1}^n y_k V_k$

$${}^t X S X = \langle X, S X \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n y_k V_k, \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k V_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^2 > 0$$

En effet on a une somme de termes positifs, un au moins étant strictement positif.

Réciproquement si λ est valeur propre de S et X vecteur propre associé on a ${}^t X S X = \lambda \|X\|^2$. comme on suppose ${}^t X S X > 0$ et que $X \neq \vec{0}$ on a bien $\lambda > 0$

b \Rightarrow **c**. S étant diagonalisable dans une base orthonormée (symétrique réelle) on peut écrire $S = P D^t P$, avec $D = \text{diag}(d_i)$. Par hypothèses les d_i sont strictement positifs. On peut donc définir $\Delta = \text{diag}(\sqrt{d_i})$ qui est inversible car les termes diagonaux sont non nuls. $M = \Delta^t P$ est alors une solution du problème.

$${}^t M M = P \Delta \Delta^t P = P D^t P = S$$

c \Rightarrow **d** si $S = {}^t M M$ avec M inversible, S est inversible (comme

produit de matrices inversibles) et S est positive d'après I2c

d \Rightarrow **b** : S est positive donc toutes les valeurs propres de S sont positives et S est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de S . Les valeurs propres de S sont donc strictement positives.

On a la chaînes $b \Rightarrow c \Rightarrow d \Rightarrow b$ et $a \Leftrightarrow b$ donc l'équivalence des 4 propositions.

2a) A est bien une matrice symétrique.

Si $X = (x_i)_{i=1}^n$ et $Y = A X = (y_j)_{j=1}^n$ on a :

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - x_2 \\ \forall j \in [[2, n-1]], y_j = -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} \\ y_n = -x_{n-1} + 2x_n \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} {}^t X A X &= \sum_{i=1}^n x_i y_i = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=2}^n x_{i-1} x_i - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{i=2}^n x_i^2 + x_1^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) - \sum_{i=1}^{n-1} x_j x_{j+1} - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1}^2 + x_1^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 \right) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^2 - 2x_i x_{i+1} + x_i^2) \\ &= x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2 \end{aligned}$$

2b pour toute colonne X on constate que ${}^t X A X$ est une somme de carré donc est un réel positif. De plus la somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul donc si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1..n-1 \rrbracket, x_{i+1} - x_i = 0 \\ x_n = 0 \end{cases}$$

Tous les x_i sont donc nuls . Donc si $X \neq (0)$ tXAX est strictement positif.

2c) Avec la matrice M du sujet notons $S = {}^tMM = (s_{i,j})$ on a en faisant le produit :

$$\begin{cases} s_1 = u_1^2 \\ i > 1 \Rightarrow s_i = u_i^2 + v_{i-1}^2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow s_{i,i+1} = s_{i+1,i} = u_i v_i \\ |j-i| > 1 \Rightarrow s_{i,j} = 0 \end{cases}$$

On doit donc résoudre le système non linéaire

$$\begin{cases} u_1^2 = 2 \\ i > 1 \Rightarrow u_i^2 + v_{i-1}^2 = 2 \\ 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow u_i v_i = -1 \end{cases}$$

On a donc $v_i = -\frac{1}{u_i}$ et en reportant $u_i^2 = 2 - \frac{1}{u_{i-1}^2}$. Soit en posant

$a_i = u_i^2$ la suite homographique :

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_i = 2 - \frac{1}{a_{i-1}} \end{cases}$$

l'équation $l = 2 - 1/l$ donne un point fixe double $l = 1$. La suite

$\frac{1}{a_i - 1}$ est donc arithmétique . Or

$$\frac{1}{a_i - 1} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a_{i-1}}} = \frac{a_{i-1}}{a_{i-1} - 1} = 1 + \frac{1}{a_{i-1} - 1}$$

d'où $\frac{1}{a_i - 1} = i$ et

$$u_i = \sqrt{\frac{i+1}{i}}, v_i = -\sqrt{\frac{i}{i+1}}$$

3a) \mathcal{U} est une base car S est une matrice inversible d'après IIIc

3b) C' est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt .Démonstration par récurrence

- ⇒ (V_1) est réduit à un seul vecteur non nul donc est une famille orthogonale de vecteurs non nuls
- ⇒ (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls et $\text{Vect}(V_1, V_2) = \text{Vect}(U_1, U_2)$. En effet
 - ⇒ p_1 est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(U_1) = \text{Vect}(V_1)$ donc $V_2 = U_2 - p_1(U_2)$ est orthogonal à V_1
 - ⇒ si V_2 était nul , on aurait $U_2 = p_1(U_2) \in \text{Vect}(U_1)$. Absurde car (U_1, U_2) est libre
 - ⇒ (V_1, V_2) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls , c'est donc une famille libre.
 - ⇒ Enfin $\text{Vect}(V_1, V_2) \subset \text{Vect}(U_1, U_2)$ par construction, et comme les deux familles de deux vecteurs sont libres il y a égalité.
- ⇒ On suppose que $(V_i)_{i=1}^{k-1}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$. Montrons que $(V_i)_{i=1}^k$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls tels que $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$.
 - ⇒ par hypothèse de récurrence on doit seulement montrer que V_k est un vecteur non nul orthogonal à $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1}$ puis $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$.

- ☞ Par construction p_{k-1} est la projection orthogonale sur $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$ donc $V_k = U_k - p_{k-1}(U_k)$ est orthogonal à $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1}$
- ☞ Si V_k est nul alors $U_k = p_{k-1}(U_k) \in \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1}$ et la famille $(U_i)_{i=1}^n$ est lié. Absurde
- ☞ Enfin par construction $V_k \in \text{Vect}(U_k) \oplus \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$ et $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^{k-1} = \text{Vect}(U_i)_{i=1}^{k-1} \subset \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$. Donc $\text{Vect}(V_i)_{i=1}^k \subset \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$. Les deux familles étant libres de même cardinal, les deux sous espaces sont égaux.

pour $k = n$ on obtient que \mathcal{V} est une base orthogonale de \mathbb{R}^n .

3c) La base est orthonormale car on norme une base orthonormée (et les dénominateurs sont non nuls car les V_i sont des vecteurs non nuls)

Par construction de \mathcal{V} on a vu que $V_k \in \text{Vect}(U_i)_{i=1}^k$. Les coordonnées de V_k sur U_{k+1}, \dots, U_n sont donc nuls.

$\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})$ est triangulaire supérieure. Diviser chaque colonne par sa norme ne change pas les coefficients nuls. $\text{Mat}_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})$ est triangulaire supérieure.

3d) notons \mathcal{B} la base canonique. On a

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(U) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{W}) \text{Mat}_{\mathcal{W}}(U) = PT$$

où T est l'inverse de la matrice triangulaire supérieure construite à la question précédente.

On a alors $S = {}^t MM = {}^t T^t PPT$. Mais P est la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{W} toutes deux bases orthonormées. Donc P est orthogonale et ${}^t PP = I_n$. Il reste donc $S = {}^t TT$

3e) Si on pose à priori $T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ le calcul donne :

$${}^t TT = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + d^2 & bc + de \\ ac & bc + de & c^2 + e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

en résolvant le système ligne par ligne et en choisissant pour a, d, f les racines carrées positives on obtient

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On constate que T est inversible et donc d'après II 1 S est définie positive.

4a) Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on a ${}^t X A_0 X = by^2 + 2cxy$ donc $y = 0$ ou $by + 2cx = 0$

4b)

☞ si A est définie positive les valeurs propres de A sont strictement positives (cf II 1). Leur somme (la trace) et leur produit (le déterminant) le sont aussi. On a donc $a + b > 0$ et $ab - c^2 > 0$. On en déduit que $a + b$ et ab sont strictement positifs donc a et b le sont.

☞ Si $a > 0$ et $ab - c^2 > 0$ on a $b > \frac{c^2}{a} > 0$ donc $\text{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$. La somme et le produit des valeurs propres sont strictement positifs donc les valeurs propres sont strictement positives. D'après II 1 A est définie positive.

4c) calcul par bloc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & {}^tX' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & {}^tV \\ V & S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xa + {}^tX'V & x{}^tV + {}^tX'S' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X' \end{pmatrix} \\ &= xax + x{}^tX'V' + x{}^tVX' + {}^tX'S'S' \\ &= ax^2 + x({}^tVX' + {}^tX'V) + {}^tX'S'X' \\ &= ax^2 + 2x{}^tVX' + {}^tX'S'X' \text{ car } {}^tVX' = {}^tX'V \\ &= a \left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} ({}^tVX')^2 + {}^tX'S'X' \\ &= a \left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 - \frac{1}{a} ({}^tX'V{}^tVX') + {}^tX'S'X' \\ &= a \left[\left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 + \frac{1}{a^2} {}^tX'(-V{}^tV + aS')X' \right] \end{aligned}$$

On vérifie que tous les produits matriciels ont un sens les matrices étant de tailles compatibles.

On en déduit donc :

☞ si $a > 0$ et $aS' - V{}^tV$ définie positive, pour toute matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $\left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 \geq 0$ et ${}^tX'(aS' - V{}^tV)X' \geq 0$ donc ${}^tXSX \geq 0$. De plus si ${}^tXSX = 0$ on a une somme nulle de réelles positives donc chaque terme est nulle. En particulier ${}^tX'(aS' - V{}^tV)X' = 0$ et donc $X' = 0$ car $aS' - V{}^tV$ est définie positive on trouve alors $x = 0$ en reportant dans $\left(x + \frac{{}^tVX'}{a} \right)^2 = 0$. Donc $X \neq 0 \Rightarrow {}^tXSX > 0$ et S est définie positive.

☞ Si S est définie positive alors $a > 0$ car pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ (0) \end{pmatrix}$,

${}^tXSX = a$ d'après le calcul précédent (avant la division par a) et $aS' - V{}^tV$ est définie positive car pour toute matrice non nul $X' \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$

$${}^tX'(aS' - V{}^tV)X' = a^2 {}^tXSX > 0 \text{ en prenant } X = \begin{pmatrix} 0 \\ X' \end{pmatrix}$$

4d) d'après I 1a

☞ Si S est définie positive la question précédente donne par une récurrence évidente que toutes les S_i sont définies positives et tous les a_i positifs pour $i < n$. Enfin $a_n > 0$ comme valeur propre de la matrice S_n définie positive.

☞ Réciproquement si les (a_i) sont tous strictement positifs $S_n = (a_n)$ est définie positive. S_n est définie positives et $a_{n-1} > 0$ donc S_{n-1} est définie positive et par récurrence si S_{i-1} est définie positive S_i est définie positive car $a_{i-1} > 0$.

4e) Si $S = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ on a $a_1 = a, V_1 = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, S'_1 = \begin{pmatrix} b & f \\ f & c \end{pmatrix}$

d'où

$$S_2 = \begin{pmatrix} ab - d^2 & af - de \\ af - de & ac - e^2 \end{pmatrix}$$

S est donc définie positive si et seulement si $a > 0$ et S_2 définie positive. Donc en utilisant II 4b si et seulement si $a > 0, ab - d^2 > 0$ et $\det(S_2) > 0$ or $\det(S_2) = (ab - d^2)(ac - e^2) - (af - de)^2 = a \det(S)$

S est définie positive si seulement si $a > 0, \begin{vmatrix} a & d \\ d & b \end{vmatrix} > 0,$

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix} > 0$$