CPGE My Youssef, Rabat

DS 3 (09-10): *Calcul différentiel Dualité*

Jeudi 10 Décembre 2009
Durée : 4 heures

Conseils pour la rédaction et la présentation des copies.

- **Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie.**
- **L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.**
- **Chaque résutat annoncé doit être justifié en citant précisément le théorème du cours avec ses hypothèses exactes utilisé ou en citant le numéro de la question précèdente utilisée.**
- **Les résultats importants doivent être simplifiés et encadrés.**
- **Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases simples.**
- **Laisser une marge à gauche de chaque feuille, en tirant un trait vertical, et un horizontal de la 1ère double feuille pour la note et les remarques du correcteur.**
- **Numéroter les double feuille de la façon suivante: 1/n,2/n,...,n/n où n est le nombre total de double feuille.**
- **Les questions doivent être traités dans l'ordre de l'énoncé.**
- **Tirer deux traits diagonaux pour rayer une partie du raisonnement que vous considérez fausse.**

Remerciements pour Mr Taibi Mimoun, MP*, CPGE My Youssef, pour la source latex du problème I

Il est demandé expressement aux candidats de donner des démontrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

PROBLḾE I

Soit E **un** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel de dimension supérieure strictement à** 1 **.** A **un vecteur non nul de** E **et** u **une forme linéaire non nulle sur** E **.**
Pour n **un entier,** $n \geq 2$**; on note** $\mathcal{M}_n = M_n(\mathbb{R})$ **la** $\mathbb{R}$**-algèbre des matrices carrées d'ordre** n **à coefficients dans** $\mathbb{R}$ **, et** $\mathcal{M}_n^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n, \mathbb{R})$ **le** $\mathbb{R}$**-espace vectoriel des formes linéaires sur** $\mathcal{M}_n$ **.**

La matrice $E_{i,j}$ **est la matrice de** $\mathcal{M}_n$ **dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve à la** i^{eme} **ligne et la** j^{eme} **colonne, qui vaut** 1 **.**
Si $M \in \mathcal{M}_n$**, on note** $vect(M)$ **le sou-espace de** $\mathcal{M}_n$ **engendré par** M**.**

Si $M = (m_{i,j}) \in M_n$**, on note** $T(M)$ **ou** $T_n(M)$ **le réel** $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i\ i}$ **appelé trace de** M.

Partie I

1- Soit f l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = u(x)A$$

a) **Quel est le rang de f ?**

b) **Pour p entier naturel, déterminer f^p en fonction de p, f, u et A .**

c) **Déterminer les éléments propres de f.**

Dans toute la suite de la partie I, on suppose que E est de dimension finie, avec $dimE = n > 1$.

2- Donner une condition necessaire et suffisante poratnt sur A pour que f soit diagonalisable .

3- Soit g un endomorphisme de E de rang 1 .

a) **Monter que, pour que g soit diagonalisable il faut et il suffit que l'endomrphisme g^2 soit non nul .**

b) **On suppose que $g^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle g a pour matrice :**

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \textit{notée encore } E_{1,n}.$$

4- Trace d'une matice carrée- Trace d'un endomorphisme :

a) **Montrer que l'application $T : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, $M \mapsto T(M)$ est une forme linéaire.**

b) **Montrer que : $T(AB) = T(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$. En déduire que deux matrices semblables ont même trace .**

> **Définition 1 . La trace d'un endomorphisme g d'un espace vectoriel E de dimension finie , notée $T(g)$, est la tarce de sa matrice relativement à une base quelconque de E.**

c) **Soit ρ un projecteur de E. Montrer que $T(\rho) = rg(\rho)$.**

5- Soit G un sous-ensemble fini non vide de $GL(E)$ stable par produit, de cardinal q (($GL(E), \circ)$ groupe linéaire de E) et $F = \{x \in E \ / \ \forall g \in G \ , \ g(x) = x\}$

a) **Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E**

b) **On pose $h = \dfrac{1}{q} \sum\limits_{g \in G} g$. Exprimer h^2 en fonction de h**

c) **En déduire que :**

$$q. \dim(F) = \sum_{g \in G} T(g).$$

Que dire de l'endomorphisme $\sum\limits_{g \in G} g$ lorsque $\sum\limits_{g \in G} T(g) = 0$?

6- .

a) **Montrer que deux matrices carrées de rang 1, sont semblables si, et seulement si elles ont même trace .**

b) **Soit $g \in L(E)$ tel que $rg(g) = T(g) = 1$. Montrer que g est un projecteur de E.**

7- Trouver une matrice carrée inversible P telle que :

$$P.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.P$$

8- Soit $M \in \mathcal{M}_n$ de rang 1.
Trouver une relation entre M^2 et M.
Déterminer les matrices M de $\mathcal{M}_3$ telle que $M^2 = 0$.

Partie II

On suppose que A n'appartient pas à $\ker(u)$. Soit alors l'endomorphisme h de E défini par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = u(A)x - u(x)A$$

9- Quelle est la restriction de h à $\ker(u)$?

10- Soit p un entier naturel. Déterminer h^p en fonction de p, h, u et A

11- Déterminer $\ker(h)$ et $\mathrm{Im}(h)$.

12- .

- **a) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de h .**
- **b) Lorsque E est de dimension finie, h est-il diagonalisable ?**

13- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $B \in E$ donnés, on considère l'équation d'inconnue $x \in E$:

$$\alpha x - u(x)A = B$$

Resoudre et discuter cette équation en fonction de α, u, A et B.

14- Appliquer à la résolution des deux équations suivantes :

- **a)** $T(A).X - T(X)A = {}^tA - A$
  (A matrice carrée donnée de $\mathcal{M}_n$ de trace non nulle, X inconue de $\mathcal{M}_n$)
- **b)** $\forall x \in [0,\pi],\ f(x) - \sin(x)\int_0^\pi f(t)dt = \sin(\frac{x}{2})$
  (d'inconnue f, fonction continue sur $[0,\pi]$)

Partie III

A chaque U dans $\mathcal{M}_n$, on associe l'application T_U de $\mathcal{M}_n$ dans $\mathbb{R}$: $M \mapsto T_U(M) = T(U.M)$

15- Montrer que, pour U dans $\mathcal{M}_n$, T_U est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$.
Pour $U \in \mathcal{M}_n$, on note $\ker(T_U)$ par H_U.

16- Soit U dans $\mathcal{M}_n$.

- **a) Si U est la matrice nulle, déterminer $\ker(T_U)$.**
- **b) Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0,j_0}) \neq 0$**
  Décrire alors $\mathrm{Im}(T_U)$, puis déterminer la dimension de H_U.

17- Pour $(i,j) \in \{1,2,...n,\}^2$, on note $T_{i,j} = T_{E_{i,j}}$.

- **a) Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{i,j}(E_{k,l})$.**
- **b) En déduire que les n^2 élements $T_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n^*$ permettent de définir une base de $\mathcal{M}_n^*$.**
- **c) Montrer que l'application φ de $\mathcal{M}_n$ vers $\mathcal{M}_n^*$: $U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels .**

18- On considère H un hyperplan vectoriel de $\mathcal{M}_n$.

a) **Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n$ qui n'appartient pas à H, montrer que :**

$$\mathcal{M}_n = H \oplus vect(A)$$

.

b) **Construire alors un élément l de $\mathcal{M}_n^*$ tel que $H = \ker(l)$.**

c) **Prouver l'existence d'un élément U de $\mathcal{M}_n$, non nul, tel que $H = H_U$.**

19- Pour $1 \leq r \leq n$, on note $J_r = \sum\limits_{i=1}^{r} E_{i,i}$ et A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n$$

a) **Prouver que A est inversible .**

b) **Prouver que A appartient à l'hyperplan H_{J_r} .**

20- Conclure que chaque hyperplan H de $\mathcal{M}_n$ possède au moins une matrice inversible .

Partie IV

Soient p et n deux entiers non nuls et $\Psi : \mathcal{M}_p \to \mathcal{M}_n$ un morphisme d'algèbres ie :

$$\Psi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_p, \mathcal{M}_n) \ \text{ et vérifie} : \forall A, B \in \mathcal{M}_p, \Psi(AB) = \Psi(A)\Psi(B)$$

21- Montrer que si $A \in GL_p(\mathbb{R})$, alors $\Psi(A) \in GL_n(\mathbb{R})$ et calculer l'inverse de $\Psi(A)$.

22- Monter que si A et B sont équivalentes dans $\mathcal{M}_p$, alors $\Psi(A)$ et $\Psi(B)$ sont équivalentes dans $\mathcal{M}_n$.

23- Soit $A \in \mathcal{M}_n$, montrer que l'application $\varphi_A : \mathcal{M}_n \to \mathbb{R}$, $M \mapsto T_n(MA)$ est une forme linéaire.

24- Soit l'application $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_n^*$, $A \mapsto \varphi_A$

a) **Montrer que φ est linéaire et déterminer $\ker(\varphi)$**

b) **Que dire de φ ?**

25- Soit $f \in \mathcal{M}_n^*$ telle que :

$$\forall\, M, N \in \mathcal{M}_n, \quad f(MN) = f(NM) \qquad (1)$$

Montrer que f est proprtionnelle à la trace.

26- Montrer que $T_n \circ \Psi \in \mathcal{M}_p^*$ et que $T_n \circ \Psi = \dfrac{n}{p} T_p$

27- Soit $P \in \mathcal{M}_n$ telle que $P^2 = P$.
Montrer que $rg(\Psi(P)) = \dfrac{n}{p}.rg(P)$, en déduire que p divise n.

28- Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$, on a :

$$rg(\Psi(M)) = \frac{n}{p} rg(M)$$

En déduire que si $p = n$, l'application Ψ est un automorphisme.