**CONCOURS NATIONAL - MAROC - 1996**
**EPREUVE DE MATHEMATIQUES II (ALGEBRE)**
Exemple d'algèbre de dimension 2
Solution par Mohammed El Fatemi

**I-1** Soit $M=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$. On a $M=\hat{M}$ si, et seulement, si $\begin{cases} a=d \\ b=-b \\ c=-c \\ d=a \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} a=d \\ b=c=0 \end{cases}$ donc les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $\hat{M}=M$ sont les $\alpha I_2$ où $\alpha$ décrit $\mathbb{R}$.

**I-2** Par des calculs simples on trouve : $M+\hat{M}=\mathrm{tr}(M)I_2$, $M\hat{M}=\hat{M}M=\det(M)\,I_2$.

**I-3** Pour $M\in M_2(\mathbb{R})$, on a d'après **I-2** $M\hat{M}=\det(M)\,I_2$ et $M\hat{M}=M(\mathrm{tr}(M)\,I_2-M)$ d'où :
$\det(M)\,I_2=\mathrm{tr}(M)-M^2$, puis : $M^2-\mathrm{tr}(M)M+\det(M)\,I_2=0$.

**I-4-1** On a : $\phi_M(\varepsilon_1)=M\varepsilon_1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}=a\varepsilon_1+c\varepsilon_2$ et $\phi_M(\varepsilon_2)=M\varepsilon_2=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}=b\varepsilon_1+d\varepsilon_2$

d'où $\mathrm{Mat}(\phi_M,(\varepsilon_1,\varepsilon_2))=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=M$.

**I-4-2** D'après **I-4-1**, M et $\phi_M$ ont même polynôme caractéristique ; il en est donc de même pour $\phi_{\hat{M}}$ et $\hat{M}$.

Or on vérifie que M et $\hat{M}$ ont le même polynôme caractéristique : $X^2-(a+d)X+(ad-bc)$.
En conclusion $\phi_M$ et $\phi_{\hat{M}}$ ont même polynôme caractéristique.

**I-5** On a successivement : MN = NM si et seulement si $(\mathrm{tr}(M)I_2-\hat{M})N=N(\mathrm{tr}(M)I_2-\hat{M})$ (d'après **I-2**)
ou encore $\mathrm{tr}(M)N-\hat{M}N=\mathrm{tr}(M)N-N\hat{M}$ c'est à dire $\hat{M}N=N\hat{M}$.

**I-6-1** Considérons l'application $\varphi_M : M_2(\mathbb{R})\mapsto M_2(\mathbb{R})$, $N \mapsto MN-NM$.
Il est clair que $\varphi_M\in L(M_2(\mathbb{R}))$ et que $C(M)=\mathrm{Ker}(\varphi_M)$. Il en résulte que C(M) est un sous $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ ; de plus $I_2$ et M appartiennent à C(M) et $(I_2, M)$ est libre car on aurait $M=\hat{M}$. On en déduit que $\dim(C(M)\geq 2$.
Montrons que $\dim(C(M)\leq 2$. Comme $\mathrm{Ker}(\varphi_M)=C(M)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi_M))+\mathrm{rg}(\varphi_M)=4$, il suffit d'établir que $\mathrm{rg}(\varphi_M)\geq 2$.
On désigne par B la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. $B=(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ écrivons la matrice de $\varphi_M$ dans B.
On a : $\varphi_M(E_{11})=ME_{11}-E_{11}M=(aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22})E_{11}-E_{11}(aE_{11}+bE_{12}+cE_{21}+dE_{22})$
$=(aE_{11}+cE_{21})-(aE_{11}+bE_{12})$
$=cE_{21}+bE_{12}$ ( En utilisant $E_{ij}E_{he}=\delta_{jh}E_{ie}$ ).
Par des calculs analogues, il vient :
$\varphi_M(E_{12})=-cE_{11}+(a-d)E_{12}+cE_{22}$, $\varphi_M(E_{21})=bE_{11}-(a-d)E_{21}-bE_{22}$, $\varphi_M(E_{22})=bE_{12}-cE_{21}$

d'où : $\mathrm{Mat}(\varphi_M, B)=\begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & -(a-d) & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{bmatrix}$. si $\mathrm{rg}(\varphi_M)<2$, on aurait la nullité des trois déterminants extraits : $\begin{vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a-d & 0 \\ 0 & -(a-d) \end{vmatrix}$ d'où : b=c=0 et a = d, c'est à dire $M=\hat{M}$ ce qui est absurde,
donc $\mathrm{rg}(\varphi_M)\geq 2$. On conclut alors que $\dim(C(M))=2$ puis que $(I_2, M)$ est une base de C(M).

**I-6-2** C(M) est déjà un sous espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, donc pour montrer que c'est une sous algèbre de

$M_2(\mathbb{R})$ , il suffit de vérifier $I_2 \in C(M)$ et que C(M) est stable par produit . $I_2M=MI_2$ montre le premier point .
Par ailleurs si $N_1, N_2 \in C(M)$ : $(N_1N_2)M = N_1(N_2M) = N_1(MN_2) = (N_1M)N_2 = (MN_1)N_2 = M(N_1N_2)$
donc $N_1N_2 \in C(M)$. En outre , comme C(M) = vect ($I_2$ ,M) et que : $\forall(a,b,a',b') \in \mathbb{R}^4$
$(a I_2 + bM)(a' I_2 + b' M) = (a' I_2 + b' M)(a I_2 + bM)$ , la sous algèbre C(M) est commutative .

**I-7** Supposons que M et N commutent . Distinguons deux cas : $M \neq \hat{M}$ et $M = \hat{M}$ .
Si $M \neq \hat{M}$ alors d'après **I-6-1** : C(M) = vect($I_2$ , M) d'où $N \in$ vect($I_2$ , M) et ($I_2$ , M , N) est liée .
Si $M = \hat{M}$ , alors d'après **I-1** ($I_2$ ,M) est liée . Par suite ($I_2$ , M , N) est liée .
Supposons que ($I_2$ , M , N) soit liée . Ils existent donc a ,b et c des réels non tous nuls tels que
$a I_2 + bM + cN= 0$ . Forcement $b \neq 0$ ou $c \neq 0$ , supposons par exemple $b \neq 0$ ; alors $M \in$ vect($I_2$ , N) , d'où M et N commutent .

**I-8** D'après **I-2** : $(M - \lambda I_2)(\widehat{M - \lambda I_2}) = \det(M- \lambda I_2)\, I_2$ . Or $\lambda$ est une valeur propre de M donc
$\det(M-\lambda I_2) = 0$ et , puisque $\widehat{M - \lambda I_2} = \hat{M} - \lambda I_2$ , on en déduit que $(M-\lambda I_2)(\hat{M} - \lambda I_2) = 0$ ou encore : $M(\hat{M} - \lambda I_2) = \lambda(\hat{M} - \lambda I_2)$ . Cela traduit que les colonnes de $\hat{M} - \lambda I_2$ sont dans l'espace propre relatif à la valeur propre $\lambda$ de $\phi_M$ . Si ces deux colonnes étaient nulles , on aurait $\hat{M} = \lambda I_2$ , donc $M= \lambda I_2$ ce qui contredit l'hypothèse $M \neq \hat{M}$ .

**I-9-1** Supposons que C(M) soit un corps . Comme $M \neq \hat{M}$ , M n'est pas une matrice homothétique d'où $M - \lambda I_2$ est inversible dans C(M) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ , donc M et par suite $\phi_M$ n'a pas de valeur propre réelle .
On suppose maintenant que $\phi_M$ n'a pas de valeurs propres réelles . Soit $N \in C(M) - \{0\}$ ; alors $N = aM + bI_2$ avec (a ,b) $\neq$ (0, 0). Si a = 0 alors $N=bI_2$ est inversible et $N^{-1} = \frac{1}{b} I_2$ est bien dans C(M) . Si $a \neq 0$ alors $N= a\,(M + \frac{b}{a} I_2)$ et M n'admettant aucune valeur propre réelle , $\det(M + \frac{b}{a} I_2) \neq 0$ et donc N est inversible dans $M_2(\mathbb{R})$ . Comme M et N commutent , M et $N^{-1}$ commutent puis $N^{-1} \in C(M)$ .

**I-9-2** Le polynôme caractéristique de $\phi_M$ est : $X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$ et donc d'après **I-9-1** la condition nécessaire et suffisante recherchée est : $[\mathrm{tr}(M)]^2 - 4\det(M) < 0$ .

**I-10-1** C(M) étant un corps , d'après **I-9-1** $\alpha$ ne peut être réel . Il en résulte que $(1, \alpha)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ . Une application $\mathbb{R}$ -linéaire de $\mathbb{C}$ vers C(M) est alors déterminée par la donnée de l'image de la base $(1, \alpha)$ .
Donc il existe une unique application f , $\mathbb{R}$- linéaire de $\mathbb{C}$ vers C(M) telle que f(1) = $I_2$ et f( $\alpha$ )= M.

**I-10-2** ( $I_2$ , M) est une base de C(M) donc l'application $\mathbb{R}$ linéaire F est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ( transforme une base en une base ) . En particulier f est bijective et : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,
$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$ . Il reste donc à montrer que : $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , $f(z_1 . z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$ .
Soient $z_1 = a_1 + \alpha b_1$ et $z_2 = a_2 + \alpha b_2$ de $\mathbb{C}$ avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ .
On a :
$f(z_1)\, f(z_2) = (a_1 I_2 + b_1 M)(a_2 I_2 + b_2 M)$ , $z_1 z_2 = a_1 a_2 + \alpha(a_1 b_2 + a_2 b_1) + \alpha^2 b_1 b_2$
donc : $f(z_1 z_2) = a_1 a_2 I_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)M + b_1 b_2 f(\alpha^2)$ . Or $\alpha^2 - \mathrm{tr}(M)\alpha + \det(M) = 0$
d'où $f(\alpha^2) = \det(M) I_2 - \mathrm{tr}(M) M = M^2$ et par suite $f(z_1 z_2) = f(z_1)\, f(z_2)$ .

**II-1-1** **__Unicité__ :** Si A , B , C , D existent alors : $L(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = A$ ; $L(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = B$ ; $L(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = C$ et $L(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = D$ .

**__Existence__ :** Pour $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ et $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ on a : $L(v_1, v_2) = L(x_1\varepsilon_1 + y_1\varepsilon_2, x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2)$ .

L étant bilinéaire on a : $L(v_1,v_2) = x_1x_2L(\varepsilon_1,\varepsilon_1) + x_1y_2L(\varepsilon_1,\varepsilon_2) + y_1x_2L(\varepsilon_2,\varepsilon_1) + y_1y_2L(\varepsilon_2,\varepsilon_2)$ d'où l'existence .

**II-1-2** D'après la remarque : $A = M\varepsilon_1$ ; $B = M\varepsilon_2$ ; $C = N\varepsilon_1$ ; $D = N\varepsilon_2$ d'où

$$\begin{aligned} L(v_1,v_2) &= (x_1x_2M\varepsilon_1 + x_1y_2M\varepsilon_2 + x_2y_1N\varepsilon_1 + y_1y_2N\varepsilon_2 \\ &= (x_1M)(x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2) + (y_1N)(x_2\varepsilon_1 + y_2\varepsilon_2) \\ &= (x_1M + y_1N)v_2 . \end{aligned}$$

**II-2-1** Supposons que L est symétrique alors en particulier $L(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = L(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$ c'est-à-dire B=C . Réciproquement si B=C il est clair que : $\forall v_1, v_2 \in M_{2,1}(\mathbb{R}), L(v_1,v_2) = L(v_2,v_1)$ .

**II-2-2** Supposons que L admet un élément neutre $v_0$ alors :
$\forall w \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : L(v_0,w) = \varphi(v_0)w = w \;\; \forall w \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ . On en déduit que $\varphi(v_0) = I_2$ et que $I_2 \in$ vect (M,N).
Réciproquement si $I_2 \in$ vect (M,N) , il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $I_2 = x_0M + y_0N$ .

Posons $v_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$; alors : $\forall w \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ , $L(v_0,w) = \varphi(v_0)w = I_2w = w$ , d'où L étant commutative $v_0$ est bien un élément neutre de L .

**II-2-3** On a successivement L est associative si et seulement si :
$\forall(v,w,T) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3$ , $L((v,w),T) = L(v,L(w,T))$ ou encore :
$\forall(v,w,T) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3$, $\varphi(L(v,w))T = \varphi(v)L(w,T)$ ou encore :
$\forall(v,w,T) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3$, $\varphi(L(v,w))T = \varphi(v)\varphi(w)T$ , c'est à dire :

$$\forall v,w \in M_{2,1}(\mathbb{R}) : \varphi(L(v,w)) = \varphi(v)\varphi(w) .$$

**II-2-4** L est associative si et seulement si : $\forall(v_1,v_2,v_3) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3, L(L(v_1,v_2),v_3) = L(v_1,L(v_2,v_3))$ .
Mais L étant supposée commutative on a : $L(L(v_1,v_2),v_3) = L(v_3,L(v_1,v_2))$ et
$L(v_1,L(v_2,v_3)) = L(v_1,L(v_3,v_2))$ , d'où la propriété .

**II-2-5** En utilisant **II-2-4** il vient successivement , L est associative si et seulement si :
$\forall(v_1,v_2,v_3) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3, L(v_3,L(v_1,v_2)) = L(v_1,L(v_3,v_2))$ , ou encore :
$\forall(v_1,v_2,v_3) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3, \varphi(v_3)\varphi(v_1)v_2 = \varphi(v_1)\varphi(v_3)v_2$ , ou encore :
$\forall(v_1,v_2,v_3) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3, \varphi(v_3)\varphi(v_1) = \varphi(v_1)\varphi(v_3)$ , ou encore :
$\forall(x_1,y_1,x_3,y_3) \in \mathbb{R}^4, (x_3M + y_3N)(x_1M + y_1N) = (x_1M + y_1N)(x_3M + y_3N)$ ou encore :
$\forall(x_1,y_1,x_3,y_3) \in \mathbb{R}^4$ , $(x_3y_1 - x_1y_3)(MN - NM) = 0$ c'est à dire si et seulement si M et N commutent .

**II-3-1** Remarquons que $\varphi$ est $\mathbb{R}$ linéaire de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ vers $M_2(\mathbb{R})$ . Si $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \operatorname{Ker}\varphi$ alors xM + yN = 0 .

Or (M, N) est libre d'où x= y = 0 . Ainsi $\varphi$ est injective .

**II-3-2** M et N commutent donc d'après **I-7** ($I_2$ , M , N) est liée , donc ils existent a ,b ,c réel non tous nuls tels que $aI_2 + bM + cN = 0$. Mais (M,N) est libre donc $a \neq 0$ et par suite $I_2 \in$ vect ( M,N) = $\operatorname{Im}(\varphi)$ .

**II-3-3** $\varphi$ étant injective on a dim( Im($\varphi$) ) = 2 . Or $I_2 \in \operatorname{Im}(\varphi)$ donc il existe $M_0 \in I_m(\varphi)$ tel que $(I_2,M_0)$ soit une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$, ce qui répond à la question . (vect $(I_2,M_0) = C(M_0)$ car $M_0 \neq \hat{M}_0$ et $M_0$ est non homothétique) .

**II-3-4** D'abord ($M_2(\mathbb{R})$ ,+, . ) est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel . De plus , L est commutative et associative d'après **II-2-5** . L admet un élément neutre d'après **II-3-2** et **II-2-2** . L est distributive par rapport à l'addition en effet :
$\forall(v_1,v_2,v_3) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^3$ , $L(v_1 + v_2, v_3) = \varphi(v_1 + v_2)v_3 = (\varphi(v_1) + \varphi(v_2))v_3$

$$= \varphi(v_1)v_3 + \varphi(v_2)v_3 = L(v_1, v_3) + L(v_2, v_3).$$

Donc $(M_2(\mathbb{R}), +, L)$ est un anneau commutatif . Par ailleurs : $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ , $\forall(v,w) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^2$ ,

$L(\lambda v, w) = L(v, \lambda w) = \lambda L(v,w) = \lambda\varphi(v)w$ . Ainsi $(M_{2,1}(\mathbb{R})$ ,+ , - , L ) est une algèbre associative commutative et unitaire. $\varphi$ est $\mathbb{R}$ linéaire injective de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ vers $M_2(\mathbb{R})$ ; de plus : $\forall(v,w) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^2$ ,

$\varphi(L(v,w)) = \varphi(v)\varphi(w)$, et l'élément neutre $v_0$ pour L vérifie : $\varphi(v_0) = I_2$ (voir **II-2-2**) d'où $\varphi$ est un homomorphisme injectif d'algèbres .

**III-1-1** Pour tout $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, on a : $q(v) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} cx - by & -bx + ay \\ dx - cy & -cx + by \end{bmatrix} = (c^2 - bd)x^2 + (b^2 - ac)y^2 + (ad - bc)xy$ .

Le résultat en découle .

**III-1-2** D'après **III-1-1** : $q(v) = (c^2 - bd)x^2 + (b^2 - ac)y^2 + (ad - bc)xy$ .

**III-1-3** On a $\mathrm{Tr}(\psi(v)) = 0$ car $\mathrm{Tr}(P) = \mathrm{Tr}(Q) = 0$ et l'application trace est une forme linéaire sur $M_2(\mathbb{R})$ . Donc d'après **I-3** : $\Psi(v)^2 = -\det(\Psi(v))I_2 = q(v)I_2$ .

**III-1-4** On rappelle que $(a_1, b_1, c_1)$ et $(a_2, b_2, c_2)$ de $\mathbb{R}^3$ sont linéairement dépendants si et seulement si les trois déterminants : $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ , $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ sont nuls . Il en résulte que q est nulle si et seulement si $\begin{vmatrix} c & b \\ d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = 0$ c'est à dire (b ,c ,d) et (a ,b ,c) sont liés .

**III-1-5** Supposons que P et Q sont liées donc par exemple $P = \mu Q$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ ; il en résulte que $\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = -\mu\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = -\mu\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ c'est-à-dire $\begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix} = -\mu\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ donc (b, c, d) et (a ,b ,c) sont liés et q est nulle . Réciproquement si q est nulle (b ,c ,d ) et (a ,b ,c ) sont liés d'où par exemple : (a ,b ,c ) = $\lambda(b, c, d)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ il vient alors que $Q = -\lambda P$ d'où P et Q sont liées .

**III-2** Soit ( $v_1, v_2$ )dans $M_{2,1}(\mathbb{R})^2$ ; on a successivement :

$$\begin{aligned} \psi(v_1)\psi(v_2) + \psi(v_2)\psi(v_1) &= [\psi(v_1 + v_2)]^2 - [\psi(v_1)]^2 - [\psi(v_2)]^2 \\ &= q(v_1 + v_2)I_2 - q(v_1)I_2 - q(v_2)I_2 \\ &= (q(v_1 + v_2) - q(v_1) - q(v_2))I_2 \\ &= 2B(v_1, v_2)I_2 . \end{aligned}$$

**III-3-1** On a : $PQ = \begin{bmatrix} 0 & -b^2 + ac \\ c^2 - bd & ad - bc \end{bmatrix}$ et $QP = \begin{bmatrix} ad - bc & b^2 - ac \\ -c^2 + bd & 0 \end{bmatrix}$ . Remarquons que : $QP = \widehat{PQ}$ .

**III-3-2** Par des calculs de déterminant on vérifie que : $\begin{cases} \det(V_1PQV) = q(V) \\ \det(V_1QPV) = -q(V) \end{cases}$

**III-3-3** On a pour $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (et avec les notations de la relation de **III-1-1**) .

$\psi(v) = xP + yQ = x\begin{bmatrix} c & -b \\ d & -c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -b & a \\ -c & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx - by & ay - bx \\ dx - cy & by - cx \end{bmatrix}$ donc les colonnes de $\psi(v)$ sont respectivement PV et QV . Il en résulte que $q(V) = -\det(PV, QV) = \det(QV, PV)$ .

**III-3-4** Il suffit de montrer que $PQ^2 = Q^2P$ . Mais $\mathrm{Tr}(Q) = 0$ d'où $Q^2 = -\det(Q)I_2$ et P et $Q^2$ commutent .

**III-3-5** On a successivement : $q(\psi(v)w = \det(\psi(v)w, PQ\psi(v)w)$ (**III-3-2**)

$$\begin{aligned} &= \det(\psi(v)w, \psi(v)QPw) \ (\textbf{III-3-4}) \\ &= \det\big(\psi(v)(w, QPw)\big) \\ &= \det(\Psi(v))\det(w, QPw) \\ &= (-q(v))(-q(w)) \qquad (\textbf{III-3-2}) \\ &= q(v)q(w). \end{aligned}$$

**IV-1-1** La bilinéarité de $\theta$ donne la bilinéarité de $\Theta$ .

**IV-1-2** D'après **II-1-1** :

$A = \Theta(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = \psi(v_0)\theta(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = \psi(v_0)P\varepsilon_1$ , $B = \Theta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \psi(v_0)\theta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \psi(v_0)P\varepsilon_2$

$C = \Theta(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = \psi(v_0)\theta(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = \psi(v_0)Q\varepsilon_1$ , $D = \Theta(\varepsilon_2, \varepsilon_1) = \psi(v_0)\theta(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = \psi(v_0)Q\varepsilon_2$ .

**IV-1-3** $M = [A, B] = [\psi(v_0)P\varepsilon_1, \psi(v_0)P\varepsilon_2] = \psi(v_0)P$ de même $N = \psi(v_0)Q$ .

**IV-1-4** On a $\varphi(v) = xM + yN = x\psi(v_0)P + y\psi(v_0)Q = \psi(v_0)(xP + yQ) = \psi(v_0)\psi(v)$ .

**IV-1-5** On a $P\varepsilon_2 = Q\varepsilon_1$ d'où $B = C$ et $\Theta$ est commutative (**II-2-1**) .

**IV-2** D'après II-2-5 $\Theta$ étant commutative il suffit de montrer que MN= NM . On a déjà vu (en **III-3-4**) que P et $Q^2$ (resp. $P^2$ et Q ) commutent , donc s'il on pose $v_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ : $P(x_0P + y_0Q)Q = Q(x_0P + y_0Q)P$ .

c'est-à-dire $P\psi(v_0)Q = Q\psi(v_0)P$ puis $\psi(v_0)P\psi(v_0)Q = \psi(v_0)Q\psi(v_0)P$ c'est-à-dire MN=NM.

**IV-3** $\Theta$ étant commutative , en montrant que $I_2 \in$ vect (M,N) , il en résultera d'après **II-2-2** que $\Theta$ admet un élément neutre et que cet élément est $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ si $I_2 = x_0M + y_0N$ . On a $(\psi(v_0))^2 = q(v_0)I_2$ et $q(v_0) \neq 0$ .

d'où $I_2 = \psi(v_0)\psi\left(\dfrac{v_0}{q(v_0}\right)$ . Notons $\dfrac{v_0}{q(v_0)} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ ; alors $I_2 = \psi(v_0)(x_0P + y_0\psi) = x_0M + y_0N$ .

Ainsi l'élément neutre est $\dfrac{v_0}{q(v_0)}$ .

**IV-4** On a $\varphi$ et $\psi$ sont $\mathbb{R}$ linéaire de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ vers $M_2(\mathbb{R})$ puis : $\forall(v_1, v_2) \in M_{2,1}(\mathbb{R})^2$,

$\varphi(\Theta(v_1, v_2)) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)$ car $\Theta$ est associative . En effet : $\forall v_3 \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ ,

$\varphi(\Theta(v_1, v_2))v_3 = \Theta(\Theta(v_1, v_2), v_3) = \Theta(v_1, \Theta(v_2, v_3)) = \varphi(v_1)\varphi(v_2)v_3$ d'où le résultat .

Enfin on a : $\varphi\left(\dfrac{v_0}{q(v_0}\right) = \psi(v_0)\psi\left(\dfrac{v_0}{q(v_0}\right) = \dfrac{1}{q(v_0)}(\psi(v_0))^2 = \dfrac{q(v_0)}{qv_0)}I_2 = I_2$ .

Donc $\varphi$ est bien un homomorphisme d'algèbres .

**IV-5** D'après **III-3-5** $q(\Theta(v_1, v_2)) = q(v_0)q(v_1)q(v_2)$ donc si v est inversible alors on a

$q(\Theta(v, v^{-1})) = q(v_0)q\ (v)q(v^{-1}) = q\left(\dfrac{v_0}{q(v_0)}\right) = \dfrac{1}{q(v_0)}$ , d'où $q(v) \neq 0$ . Réciproquement si $q(v) \neq 0$ ,

$\Psi(v)$est inversible ; posons alors : $v' = [\psi(v)]^{-1}[\psi(v_0)]^{-1}\dfrac{v_0}{q(v_0)}$ .

On a $\Theta(v, v') = \psi(v_0)\psi(v)[\psi(v)]^{-1}[\psi(v_0)]^{-1}\dfrac{v_0}{q(v_0)} = \dfrac{v_0}{q(v_0)}$ . D'où $\Theta$ étant commutative v est inversible

et $v^{-1} = v' = [\psi(v)]^{-1}[\psi(v_0)]^{-1}\dfrac{v_0}{q(v_0)}$ .