Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°1
Dualité-Réduction

MP-CPGE Rabat

Lundi 1èr Novembre
Durée : 4 heures

Blague du jour

- Que dit 8 en rencontrant 0 ?

Réponse : Il ne fait pas de régime lui !

- Et que dit 0 en rencontrant 8 ?

Réponse : Belle ceinture !

- Et puisqu'il est toujours question de 8, que vaut 8 divisé par 2 ?

Réponse : Verticalement, ça donne 3, horizontalement, ça donne 0.

Issai Schur (1875-1941)

Mathématicien russe, étudiant de Frobenius en Allemagne. Il travaillait surtout sur la théorie de représentation des groupes, mais aussi sur la théorie des nombres et combinatoire.
Parmi ses étudiants, Richard Brauer, B. H. Neumann et Richard Rado. Il était aussi membre de l'Académie Russe des Sciences.

Mathématicien du jour

Les calculatrices sont autorisées.

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

1 Exercice : Dualité (Transposée et lemme de Shur)

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle transposée de f, l'application définie par

$$ {}^t f : \begin{array}{ccc} E^* & \longrightarrow & E^* \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ f \end{array} $$

1. Montrer que l'application $ {}^t : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E^*) \\ f & \longmapsto & {}^t f \end{array} $ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2. a. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$, exprimer ${}^t(g \circ f)$ en fonction de ${}^t g$ et ${}^t f$.

   b. Calculer ${}^t \mathrm{id}_E$.

   c. En déduire que f est un automorphisme de E si et seulement si ${}^t f$ est un automorphisme de E^*, exprimer dans ce cas ${}^t f^{-1}$ en fonction de ${}^t f$.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, et M la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$. Exprimer la matrice de ${}^t f$ relativement la base duale $\mathcal{B}^*$ en fonction de M.

4. Dire comment répondre aux questions précédentes avec un argument matriciel.

5. Montrer que $\mathrm{Im}\ {}^t f = (\ker f)^{\perp}$ et que $\ker {}^t f = (\mathrm{Im}\ f)^{\perp}$.

6. En déduire que :
   a. ${}^t f$ est injective si et seulement si f est surjective.
   b. ${}^t f$ est surjective si et seulement si f est injective.

7. Lemme de Schur : Tout endomorphisme en dimension finie qui laisse stable tout hyperplan est une homothétie.
   a. Montrer que si f laisse stable un hyperplan H, alors ${}^t f$ laisse stable laisse stable tous ses supplémentaires $\mathbb{K}x_0^*$ où $x_0 \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}x_0$.
   b. Montrer que si $\{x, f(x)\}$ est liée pour tout $x \in E$, alors f est une homothétie
   c. Montrer qu'un endomorphisme qui laisse stable toutes les droites est forcément une homothétie.
   d. En déduire le lemme de Schur.

2 Problème : Réduction, source : CCP, MP, 2008.

MATRICES DONT LES VALEURS PROPRES SONT SUR LA DIAGONALE

Les matrices diagonales et les matrices triangulaires sont des exemples triviaux de matrices ayant leurs valeurs propres sur la diagonale. Ce problème s'intéresse aux matrices vérifiant cette particularité.
Dans ce problème, toutes les matrices sont à coefficients réels et n est un entier, $n \geqslant 2$. On dira qu'une matrice $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice à diagonale propre si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et si ses termes diagonaux sont ses valeurs propres avec le même ordre de multiplicité, c'est-à-dire si le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - X)$$

On pourra noter en abrégé : A est une MDP pour A est une matrice à diagonale propre. On notera $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

2.1 EXEMPLES

Question préliminaire : Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, montrer que $\chi_M(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(M)X^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Com}\,(M))X + \det(M)$.

1. Soit α un réel et $M(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & 2 & -\alpha \\ 1 & 1 & 2-\alpha \end{pmatrix}$
   a. Calculer, en donnant le détail des calculs, le polynôme caractéristique de la matrice $M(\alpha)$. Démontrer que, pour tout α, la matrice $M(\alpha)$ est une matrice à diagonale propre.
   b. Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles la matrice $M(\alpha)$ est diagonalisable ?

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice antisymétrique A est-elle une matrice à diagonale propre ?

3 Cas $n = 2$. Déterminer $\mathcal{E}_2$.

2.2 TEST DANS LE CAS $n = 3$

4 Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice à diagonale propre soit inversible. Donner un exemple de matrice à diagonale propre (non diagonale) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et telle que A^{-1} est également une matrice à diagonale propre. On donnera A^{-1}

5 Soit $A = (aij)$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, démontrer que A est une matrice à diagonale propre si et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes : $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ et $a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$

6 Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par blocs (les matrices A et C étant des matrices carrées), démontrer que

$$\det M = (\det A)(\det C)$$

(on pourra utiliser les matrices par blocs $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$ en donnant des précisions sur les tailles des matrices qui interviennent).

7 Donner un exemple d'une matrice M à diagonale propre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ (matrice 4×4) dans chacun des cas suivants :

a La matrice M contient treize réels non nuls (on expliquera brièvement la démarche).

b $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où les matrices A, B et C sont toutes des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ne contenant aucun terme nul (on expliquera brièvement la démarche).

2.3 QUELQUES PROPRIÉTÉS

8 Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre, démontrer que, pour tout couple (a, b) de réels, les matrices $aA + bI_n$ et les matrices $a^tA + bI_n$ sont encore des matrices à diagonale propre.

9 Montrer que pour toute matrice à diagonale propre, M, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M - xI_n$ soit inversible et à diagonale propre pour tout $0 < x < \varepsilon$.

10 Matrices trigonalisables

a Une matrice trigonalisable est-elle nécessairement une matrice à diagonale propre ?

b Justifier qu'une matrice à diagonale propre est trigonalisable.

c Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit semblable à une matrice à diagonale propre.

11 Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices à diagonale propre. $\mathcal{E}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2.4 MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

On notera $\mathcal{S}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices antisymétriques.

12 Question préliminaire
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer $\mathrm{tr}({}^tAA)$.

13 Matrices symétriques à diagonale propre

a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, ..,\lambda_n$. Démontrer que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

b) Déterminer l'ensemble des matrices symétriques réelles à diagonale propre.

14 Matrices antisymétriques à diagonale propre
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale propre.

a) Démontrer que $A^n = 0$ et calculer $({}^tAA)^n$.

b) Justifier que la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable puis que ${}^tAA = 0$.

c) Conclure que A est la matrice nulle.

2.5 SOUS-ESPACE VECTORIEL MAXIMAL DANS $\mathcal{E}_n$

15 Question préliminaire
Indiquer la dimension de $\mathcal{A}_n$ (on ne demande aucune démonstration, la réponse suffit).

16 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$. Démontrer que

$$\dim F \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$$

pour cela on pourra utiliser $\dim(F + \mathcal{A}_n)$. Quelle est la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$?

17 Déterminer un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale, mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

Fin

Bonne Chance