.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°1
Dualité-Réduction

MP-CPGE Rabat

Lundi 1èr Novembre
Durée : 4 heures

Blague du jour

● Savez-vous pourquoi, à CUBA, il n'y a pas d'églises ?
C'est parce que les "fidèles cassent trop".
● Docteur, j'ai des trous de mémoire, que dois-je faire ?
- Me payer d'avance, madame !
● Un professeur de médecine à ses étudiants : Qui provoque le stress et la colère ?
- Votre cours, monsieur ; lui répondent.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917)

Mathématicien allemand, On lui doit l'introduction des caractères d'un groupe non commutatif. Il travaille aussi en algèbre linéaire et donne la première démonstration générale du théorème de Cayley-Hamilton. Il émet l'hypothèse, démontrée plus tard, que les polynômes minimaux et caractéristiques d'un endomorphisme ont les mêmes racines. Il démontre le théorème qui porte son nom : les seules algèbres associatives de dimension finie et sans diviseur de zéro sur le corps des nombres réels, sont le corps des nombres réels, le corps des nombres complexes et le corps des quaternions.

Mathématicien du jour

1 Corrigé Exercice : Pr Mamouni My Ismail

1. Linéarité (évidente).
Injection : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que ${}^tf = 0$, donc $\forall x \in E$, on a $\varphi(f(x)) = 0$, $\forall \varphi \in E^*$, d'où $f(x) \in (E^*)^\perp = 0$.
Bijection : ${}^t : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E^*)$ est linéaire injectif en dimension finie, avec $\dim \mathcal{L}(E) = \dim \mathcal{L}(E^*) = n^2$, donc isomorphisme.

2. a) Soit $\varphi \in E^*$, ${}^t(g \circ f)(\varphi) = \varphi \circ g \circ f = {}^tf(\varphi \circ g) = {}^tf({}^tg(\varphi))$, donc ${}^t(g \circ f) = {}^tf \circ {}^tg$.
b) ${}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_{E^*}$.
c) Si f est un automorphisme de E, donc $\mathrm{id}_{E^*} = {}^t\mathrm{id}_E = {}^tf \circ f^{-1} = {}^tf \circ {}^tf^{-1}$, d'où ${}^tf$ est un automorphisme de E^*, $({}^tf)^{-1} = {}^tf^{-1}$.
Inversement, supposons que ${}^tf$ est automorphisme. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que ${}^tf^{-1} = {}^tg$, on $\mathrm{id}_{E^*} = {}^tf \circ {}^tg = {}^tg \circ f$, d'où $g \circ f = \mathrm{id}_E$, de même $f \circ g = \mathrm{id}_E$, ainsi f est isomorphisme.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et $M = (a_{ij})$ la matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ et soit $N = (b_{ij})$ la matrice de ${}^tf$ relativement la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$. On a $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ et ${}^tf(e_j^*) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e_i^*$,

donc ${}^t f(e_j^*)(e_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i^*(e_k) = b_{kj}$, or ${}^t f(e_j^*)(e_k) = e_j^* \circ f(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_j^*(e_i) = a_{jk}$. Conclusion : $N = {}^t M$.

4 Les questions précédentes découlent des relations matricielles suivantes : ${}^t(AB) = {}^t B.{}^t A$, ${}^t I_n = I_n$ et A inversible si et seulement si ${}^t A$ inversible et dans ce cas $({}^t A)^{-1} = {}^t A^{-1}$.

5 Soit $\psi \in \mathrm{Im}\ {}^t f$, donc $\exists \varphi \in E^*$ tel que $\psi = \varphi \circ f$, $\forall x \in \ker f$, on a $\psi(x) = \varphi \circ f(x) = 0$, donc $\psi \in (\ker f)^{\perp}$, d'où $\mathrm{Im}\ {}^t f \subset (\ker f)^{\perp}$, or les deux sous-espaces sont de même dimension, d'où l'égalité. Par un raisonnement similaire (à rédiger correctement), on montre que $\ker {}^t f = (\mathrm{Im}\ f)^{\perp}$.

6 En déduire que :

a ${}^t f$ est injective si et seulement si $\ker f = (\mathrm{Im}\ f)^{\perp} = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\ f = E$ si et seulement si f est surjective.

b ${}^t f$ est surjective si et seulement si f est injective (raisonnement pareil).

7 a Si f laisse stable un hyperplan H, alors pour tout $x_0 \in E$ tel que $E = H \bigoplus \mathbb{K}x_0$, soit $x = x_1 + \lambda x_0 \in E$, on a on a ${}^t f(x_0^*)(x) = x_0^* \circ f(x) = x_0^*(f(x_1)) + \lambda = \lambda = x_0^*(x)$, car $f(x_1) \in H$ (f laisse stable H). Ainsi ${}^t f(x_0^*) = x_0^*$, d'où ${}^t f$ laisse stable $\mathbb{K}x_0^*$.

b Résultat classique : On a pour tout $x \in E$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$, on se propose de montrer que $\lambda_x = \lambda y = \lambda$, $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$, ainsi $f(x) = \lambda x$.
-1èr cas, $\{x, y\}$ liée : $y = \alpha x$, donc $f(y) = \alpha f(x)$, càd $\lambda_y y = \alpha \lambda_x x = \lambda_x y$, d'où $\lambda_x = \lambda_y$.
-2ème cas, $\{x, y\}$ libre : dans ce cas $f(x+y) = f(x) + f(y) \Longrightarrow \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$, or la famille $\{x, y\}$ est libre d'où $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}$.

c Soit f un endomorphisme qui laisse stable toutes les droites, donc pour tout $x \in E$, on aura $f(x) \in \mathbb{K}x$ (car $x \in \mathbb{K}x$), d'où $\{x, f(x)\}$ liée, donc f est une homothétie.

d Soit f endomorphisme en dimension finie qui laisse stable tout hyperplan de E. Soit $\mathbb{R}\varphi$ une droite de E^*, soit $x \in E$ tel que $\varphi = x^*$, donc $E = \ker \varphi \bigoplus \mathbb{R}x$. Ainsi f laisse stable H et ${}^t f$ laisse stable la droite $\mathbb{R}x^* = \mathbb{R}\varphi$, d'où ${}^t f = \lambda \mathrm{id}_{E^*} = {}^t(\lambda \mathrm{id}_E$, d'où $f = \lambda \mathrm{id}_E$.

2 Corrigé Problème : Pr Bruno Baudin

2.1 EXEMPLES

Question préliminaire : Les coefficients respectifs de X^3, X^2 et constant dans χ_M sont des résultats du cours, pour le coefficient de X^2 dans $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - X & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - X \end{vmatrix}$. On trouve que le coefficient de X^2 est : $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{tr}(\mathrm{Com}\,(A))$

1 a Le polynôme caractéristique de $M(\alpha)$ est
$P_{M(\alpha)}(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(M(\alpha))X^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{Com}\,(M(\alpha)))X + \det(M(\alpha))$
$= -X^3 + (5-\alpha)X^2 - (8 - 3\alpha)X + (4 - 2\alpha)$
$= (1 - X)(2 - X)((2 - \alpha) - X)$.
Les racines de $P_{M(\alpha)}$ sont bien les éléments diagonaux de $M(\alpha)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } \alpha, \text{ la matrice } M(\alpha) \text{ est une matrice à diagonale propre.}}$$

b Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors les valeurs propres de $M(\alpha)$ sont deux à deux distinctes, $M(\alpha)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 0$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 1 et 2 de multiplicité 2.
$\mathrm{rg}(M(0) - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$, la dimension de E_2 est donc 2 et $M(0)$ est diagonalisable.
Si $\alpha = 1$ les valeurs propres sont 1 de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1.
$\mathrm{rg}(M(1) - I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$, la dimension de E_1 est donc 1 et $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

$\boxed{M(\alpha) \text{ est diagonalisable si et seulement si } \alpha \neq 1.}$

2 $P_A(X) = -X^3 + \mathrm{tr}(A)X^2 - \mathrm{tr}(\,\mathrm{Com}\,(A))X + \det(A) = -X^3 - X$.
P_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc

$\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas à diagonale propre.}}$

3 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
$P_A(X) = X^2 - (a+d)X + (ad - bc)$.
Soit $Q(X) = (X-a)(X-d) = X^2 - (a+d)X + ad$.
la matrice A est à diagonale propre si et seulement si $P_A = Q$, c'est à dire si et seulement si $bc = 0$.

$\boxed{\mathcal{E}_2 \text{ est donc l'ensemble des matrices triangulaires.}}$

2.2 TEST DANS LE CAS $n = 3$

4 Pour une matrice à diagonale propre, le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux.

$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls}}$

Il suffit de prendre une matrice triangulaire, non diagonale et inversible :
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. A est une matrice à diagonale propre si et seulement si son polynône caractéristique est égal à $(a_{11} - X)(a_{22} - X)(a_{33} - X)$
En développant ces deux polynômes et en identifiant leurs coefficients on trouve que

$$\boxed{\begin{array}{l} A \text{ est une matrice à diagonale propre si et seulement si} \\ \det A = \displaystyle\prod_{i=1}^{3} a_{ii} \text{ et } a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0 \end{array}}$$

6 a Si ($\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$) et ($a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 0$)
alors la matrice est MDP
sinon la matrice n'est pas MDP.

b

$\boxed{\text{Les matrices à diagonale propre sont } A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 \text{ et } A_8}$

c

$\boxed{a_{12}a_{21} = a_{13}a_{31} = a_{23}a_{32} = 0}$

2.3 EXEMPLES DE MATRICES PAR BLOCS

7 Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$. On note r et s les dimensions des matrices A et C.

Alors $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$.

En développant r fois par rapport à la première colonne, on montre que

$\det \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det C$

En développant s fois par rapport à la dernière ligne, on montre que

$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_s \end{pmatrix} = \det A$.

$$\boxed{\text{On a donc bien } \det M = \det A \det C.}$$

8 a Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est une matrice par blocs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et si les matrices A et C sont des matrices carrées d'ordre r et s à diagonale propre, alors M est une matrice à diagonale propre.

En effet, d'après la question précédente,

$P_M(X) = \det \begin{pmatrix} A - XI_r & B \\ 0 & C - XI_s \end{pmatrix} = \det(A - XI_r)\det(C - XI_s) = P_A(X)P_C(X)$

Les matrices A et C étant à diagonale propre, les valeurs propres de M sont ses éléments diagonaux.

On prend alors $A = (1)$ (matrice à diagonale propre car triangulaire), $B = (111)$ et $C = A_5$ (définie à la question 6, matrice à diagonale propre dont tous les termes sont non nuls)

On obtient $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$$\boxed{M \text{ est à diagonale propre et contient bien treize réels non nuls}}$$

b Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ une matrice par blocs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où les matrices A, B et C sont des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne contiennent aucun terme nul.

De même qu'en a), $P_M(X) = P_A(X)P_C(X)$.

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$.

Si a ou d est valeur propre de A, alors P_A est scindé et $\mathrm{tr}A = a + d$, les valeurs propres de A sont alors a et d, la matrice A est alors à diagonale propre et d'après la question 3. c'est une matrice triangulaire ce qui est impossible car la matrice A ne contient aucun terme nul.

Donc, les valeurs propres de A sont e et h et les valeurs propres de C sont a et d.

On en déduit $P_A(X) = (X - e)(X - h)$ et $P_C(X) = (X - a)(X - d)$.

En développant ces polynômes et en identifiant leurs coefficients, on obtient les relations : $\begin{cases} a + d = e + h \\ ad - bc = eh \\ eh - gf = ad \end{cases}$

Il suffit de trouver des réels a, b, c, d, e, f, g et h tous non nuls vérifiant ces équations et de prendre une matrice B quelconque ne contenant aucun terme nul.

Par exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

On obtient : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

2.4 QUELQUES PROPRIÉTÉS

9 On note $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Les valeurs propres de A sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.
Les valeurs propres de $aA + bI_n$ sont $a.a_{11} + b$, $a.a_{22} + b$ ... $a.a_{nn} + b$.
Ce sont les termes diagonaux de $aA + bI_n$,

$$\boxed{aA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$$

Les termes diagonaux et les valeurs propres d'une matrice et de sa transposée sont les mêmes, et ${}^t(aA + bI_n) = a{}^tA + bI_n$,

$$\boxed{a{}^tA + bI_n \text{ est donc une matrice à diagonale propre.}}$$

10 Soit $A \in \mathcal{E}_n$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_p = A - \dfrac{1}{p}I_n$.
D'après la question précédente, U_p est une matrice à diagonale propre.
D'autre part, $\det U_p = P_A(\dfrac{1}{p})$ est nul si et seulement si $\dfrac{1}{p}$ est valeur propre de A. U_p est donc inversible sauf pour un nombre fini de valeurs de p.

11 a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable et aussi trigonalisable, mais d'après la question 3., elle n'est pas à diagonale propre.

$$\boxed{\text{Une matrice trigonalisable n'est pas nécessairement à diagonale propre.}}$$

b Par définition, le polynôme caractéristique d'une matrice à diagonale propre est scindé, une telle matrice est donc trigonalisable.

$$\boxed{\text{Une matrice à diagonale propre est trigonalisable}}$$

c Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Si A est semblable à une matrice B à diagonale propre, alors $P_A = P_B$ et P_B est scindé, donc P_A est scindé.
Si P_A est scindé, alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure, or toute matrice triangulaire est à diagonale propre donc A est semblable à une matrice à diagonale propre.

$$\boxed{A \text{ est semblable à une matrice à diagonale propre si et seulement si } P_A \text{ est scindé.}}$$

12 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Comme toute matrice triangulaire est à diagonale propre, il suffit d'écrire A comme une somme de deux matrices triangulaires :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$ il existe une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui n'est pas à diagonale propre, par exemple la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Cette matrice s'écrit comme somme de deux matrices à diagonale propre, donc

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

2.5 MATRICES SYMÉTRIQUES ET MATRICES ANTISYMÉTRIQUES

13 $\mathrm{tr}({}^t\mathbf{A}\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$.

14 a $\mathbf{A}$ est une matrice réelle et symétrique donc il existe une matrice orthogonale $\mathbf{P}$ et une matrice diagonale $\mathbf{D}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}{}^t\mathbf{P}$.
$\mathrm{tr}({}^t\mathbf{A}\mathbf{A}) = \mathrm{tr}(\mathbf{P}\mathbf{D}{}^t\mathbf{P}\mathbf{P}\mathbf{D}{}^t\mathbf{P})$
$= \mathrm{tr}(\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{D}{}^t\mathbf{P})$ (car ${}^t\mathbf{P}\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$.)
$= \mathrm{tr}(\mathbf{D}^2)$ (car $\mathbf{P}\mathbf{D}^2{}^t\mathbf{P}$ semblable à $\mathbf{D}^2$ et deux matrices semblables ont la même trace.)
Or $\mathrm{tr}({}^t\mathbf{A}\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et $\mathrm{tr}(\mathbf{D}^2) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.}$$

b Si de plus $\mathbf{A}$ est une matrice à diagonale propre, alors les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont a_{11}, a_{22} ... a_{nn}.
Donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ et $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}^2 = 0$, la matrice $\mathbf{A}$ est une matrice diagonale.
Réciproquement, toute matrice diagonale est à diagonale propre.

$$\boxed{\text{Les matrices symétriques réelles à diagonale propre sont donc les matrices diagonales.}}$$

15 a $\mathbf{A}$ est antisymétrique, donc tous ses éléments diagonaux sont nuls et comme elle est à diagonale propre, son polynôme caractéristique est scindé et toutes ses valeurs propres sont nulles. On a donc $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) = (-1)^n\mathbf{X}^n$ et par le théorème de Cayley-Hamilton

$$\boxed{\mathbf{A}^n = 0.}$$

$({}^t\mathbf{A}\mathbf{A})^n = (-\mathbf{A}\mathbf{A})^n = (-1)^n\mathbf{A}^{2n} = 0.$

$$\boxed{({}^t\mathbf{A}\mathbf{A})^n = 0.}$$

b ${}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.
$({}^t\mathbf{A}\mathbf{A})^n = 0$ donc toutes les valeurs propres de ${}^t\mathbf{A}\mathbf{A}$ sont nulles.
On en déduit

$$\boxed{{}^t\mathbf{A}\mathbf{A} = 0.}$$

c De ce qui précède, on déduit que $\mathrm{tr}({}^t\mathbf{A}\mathbf{A}) = 0$ donc $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0$.

$$\boxed{\mathbf{A} \text{ est donc la matrice nulle.}}$$

16 $\dim \mathcal{A}_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

17 Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que l'on ait $F \subset \mathcal{E}_n$.
De la question 15., on déduit $F \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$.
Donc $\dim F + \dim \mathcal{A}_n = \dim(F + \mathcal{A}_n) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$
On en déduit $\dim F \leq n^2 - \dim \mathcal{A}_n = n^2 - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$\boxed{\dim F \leq \frac{n(n+1)}{2}.}$$

Le sous-espace des matrices triangulaires supérieures est de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et il est inclus dans $\mathcal{E}_n$.

La dimension maximale d'un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$ est donc $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

18 On prend pour F l'ensemble des matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec
$A \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & m_{32} & m_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & m_{n2} & \cdots & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble de ces matrices est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ qui n'est pas constitué uniquement de matrices triangulaires.
Les matrices A et C sont à diagonale propre et d'après ce que l'on a vu dans la question 8., on en déduit que M est à diagonale propre et que donc $F \subset \mathcal{E}_n$.

On a déterminé un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $F \subset \mathcal{E}_n$, de dimension maximale mais tel que F ne soit pas constitué uniquement de matrices triangulaires.

FIN

À la prochaine