Problèmes Corrigés MP

Corrigé Devoir Survéillé

Corrigé Problème I : Pr. Devulder

Partie I.

1.1. D'après la formule du binôme, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=(1+1)^n=2^n$

1.2. On a donc $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^*=1$.

1.3. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ sont grossièrement divergentes.

2.1. La formule du binôme indique que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n^*=\frac{1}{2^n}(z+1)^n$

2.2.1. On sait calculer les sommes géométriques. La raison z étant différente de 1, $\sum_{k=0}^{n}z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ Pour $|z|<1$ ce terme admet une limite. $\sum(a_n)$ converge et $A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^k=\frac{1}{1-z}$

2.2.2. On a $\left|\frac{z+1}{2}\right|\leq\frac{1+|z|}{2}<1$ et $\sum(a_n^*)$ est donc aussi une série géométrique convergente de somme $\sum_{n\geq0}a_n^*=\frac{1}{1-\frac{z+1}{2}}=\frac{2}{1-z}=2A(z)$

2.3.1. La série $\sum(a_n)$ est grossièrement divergente (terme général qui n'est pas de limite nulle).

2.3.2. Si $z=-2$ alors $a_n^*=(-1/2)^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente.

2.3.3. (a_n^*) est une suite géométrique de raion $r=\frac{e^{i\theta}+1}{2}=\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$. Comme $\theta\in]0,\pi[$, $|r|\in]0,1[$ et $\sum(a_n^*)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty}a_k^*=\frac{1}{1-r}=\frac{2}{1-e^{i\theta}}=\frac{ie^{-i\theta/2}}{\sin(\theta/2)}=1+i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$

Partie II.

1.1.1. On a $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^k}{k!}$

1.1.2. Par croissance comparées, on a donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=0$

1.2. q étant fixé, $S_q(n,a)$ est alors une suite finie de suites de limite nulle et $\lim_{n\to+\infty}S_q(n,a)=0$

1.3. Soit $\varepsilon>0$. Comme a est de limite nulle, il existe un rang q tel que $\forall k\geq q,\ |a_k|\leq\varepsilon/2$. La suite $S_q(n,a)$ étant de limite nulle, il existe n_0 tel que $\forall n\geq n_0,\ |S_q(n,a)|\leq\varepsilon/2$.

On a alors $\forall n \geq n_0$, $|a_n^*| = \left| S_q(n,a) + \frac{1}{n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}a_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\varepsilon}{2}$ Comme $\sum_{k=q+1}^{n}\binom{n}{k} \leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \leq 2^n$, on a finalement $\forall n \geq n_0$, $|a_n^*| \leq \varepsilon$ et on a montré que $\lim_{n\to+\infty} a_n^* = 0$

1.4. On a $a_n^* - l = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a_k - l)$ et on se ramène au cas précédent $(a_n - l \to 0)$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty} a_n^* = l$

1.5. Si $a_n = (-2)^n$ alors (a_n^*) est une suite convergente de limite nulle alors que (a_n) est une suite divergente. Il n'y a donc pas équivalence entre les convergences de (a_n) et de (a_n^*).

2.1. Un calcul au brouillon (non reporté) donne $U_0 = S_0$, $U_1 = 2S_0 + S_1$, $U_2 = S_2 + 3S_1 + 3S_0$, $U_3 = S_3 + 4S_2 + 6S_1 + 4S_0$

2.2.1. On peut donc supposer que $U_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}S_k$

2.2.2. La formule précédente est vraie pour $n = 0,1,2,3$. Soit $n \geq 3$ tel que la formule soit vraie jusqu'au rang $n-1$. On remarque que $U_n = 2^nT_n = 2U_{n-1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$ On utilise alors la remarque de l'énoncé pour exprimer a_k à l'aide de S_k et S_{k-1}. En réordonnant les termes (on scinde la somme en deux et on réindice), on obtient $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k+1}\right)S_k + S_n$ Avec l'hypothèse de récurrence au rang $n-1$, on a donc $U_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}\right)S_k + S_n$ La formule $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ permet alors de montrer le résultat au rang n.

2.3. On suppose que $\sum(a_n)$ converge et on note S sa somme. On a donc $S_n \to S$ quand $n \to +\infty$. Avec la question précédente, on a $U_{n-1} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} - S_1$ Comme $S_{n+1} \to S$, la question $II.1$ indique que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}S_{k+1} = S$ ce qui donne $\frac{U_{n-1}+S_1}{2^n} \to S$ ou encore $T_{n-1} = \frac{U_{n-1}}{2^{n-1}} \to 2S$. La série $\sum(a_n^*)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty}a_n^* = 2\sum_{n=0}^{\infty}a_n$

2.4. Si $a_n = (-2)^n$ alors $\sum(a_n)$ diverge alors que $\sum(a_n^*)$ converge. Les séries $\sum(a_n)$ et $\sum(a_n^*)$ n'ont donc pas toujours même nature.

Partie III.

4.1.1. On a $w_k = -\ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{k+1} \sim \frac{1}{2(k+1)^2}$ et c'est donc le terme général d'une série absolument convergente.

4.1.2. Soit $v_n = \sigma_n - \ln(n)$; on a $v_n - v_{n+1} = w_n$. Or, la série $\sum(v_n - v_{n+1})$ et la suite (v_n) ont même nature et donc (v_n) est une suite convergente.

4.2. En regraoupant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, on a $\tau_{2n} = -\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ $\sigma_{2n} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} +$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}$ En faisant la différence, on obtient $\tau_{2n}=\sigma_{2n}-\sigma_n$

4.3. Sotons l la limite de $(\sigma_n-\ln(n))=(v_n)$. On a $v_{2n}-v_n=\sigma_{2n}-\sigma_n-\ln(2)=\tau_{2n}-\ln(2)$ Cette quantité étant de limite $l-l=0$, on a donc $\tau_{2n}\to\ln(2)$. Par ailleurs $\tau 2n+1-\tau_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ et donc $\tau_{2n+1}\to\ln(2)$. Finalement, la suite τ est convergente de limite $\ln(2)$ ou encore $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\ln(2)$

5.1. $(\sigma_n-\ln(n))$ admettant une limite finie, on a $\sigma_n\sim\ln(n)$. Ainsi, $(x^n\sigma_n)$ est bornée si et seulement si $|x|<1$. Le rayon de convergence R est donc égal à 1.

5.2. Comme $\sigma_n\to+\infty$, $\sum(\sigma_n)$ diverge et $\Delta=[-1,1[$. On peut dériver terme à terme la série entière pour obtenir $\forall x\in[0,1[$, $\phi'(x)=\sum_{n\geq1}n\sigma_n x^{n-1}\geq0$ et ϕ est donc croissante sur $[0,1[$.

5.3. La relation $\gamma_n=\frac{\sigma_n}{n!}$ peut s'écrire $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ Si on pose $a_k=\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ pour $k\geq1$ et $a_0=0$, on a donc $\frac{\sigma_n}{2^n}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k=a_n^*$ La partie II indique alors que $\sum(a_n^*)$ est convergente de somme égale à deux fois celle de $\sum(a_n)$. On a ainsi $\phi\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n\geq1}\frac{\sigma_n}{2^n}=2\ln(2)$

5.4. Soit $u_k=\frac{1}{k}$ si $k\geq1$ et $u_0=1$. Soit w la suite constante égale à 1. On a $\forall n\geq0$, $\sigma_n=\sum_{k=0}^{n}u_k w_{n-k}=(u*w)_n$ où $u*w$ désigne le produit de Cauchy de u par w. Le cours indique alors que $\forall x\in]-1,1[$, $\phi(x)=\sum_{k\geq0}u_k x^k\sum_{k\geq0}x^k=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$ On retrouve $\phi(1/2)=2\ln(2)$.

Corrigé Problème II : Pr. Deyris

① Si H et G ne sont pas en somme directe, alors leur intersection contient un vecteur u non nul, et donc le vecteur $v=u/\|u\|$ appartient à $H\cap G\cap S$. Mais alors on doit avoir $\Phi_Q(v)\geq0$ puisque $H\in\mathcal{V}_0^+$, et $\Phi_Q(v)<0$ puisque $G\in\mathcal{V}^-$, contradiction.

Puisque les dimensions possibles des sous-espaces sont en nombre fini, il existe $H_0\in\mathcal{V}^+$ vérifiant $r(\Phi_Q)=\dim H_0$, et $G_0\in\mathcal{V}^-$ vérifiant $s(\Phi_Q)=\dim G_0$. Puisque $\mathcal{V}^+\subset\mathcal{V}_0^+$, ces deux sous-espaces sont en somme directe d'après ce qui précède, et donc $r(\Phi_Q)+s(\Phi_Q)=\dim(H_0+G_0)\leq\dim\mathbb{R}^n=n$.

② Puisque Q est symétrique réelle, on sait que $\mathbb{R}^n$ admet une base orthonormale de vecteurs propres pour Q. Posons $p=n^+(Q)$, et choisissons une telle base orthonormale $(e_1,\ldots,e_n)$, en numérotant les vecteurs de manière à ce que les p premiers vecteurs de la base soient associés à des valeurs propres strictement positives, notées $\mu_1,\ldots,\mu_p$. Soit enfin $H=\overrightarrow{(}e_1,\ldots,e_p)$.

Si $u = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in H \setminus \{0\}$, alors un calcul classique fournit $\Phi_Q(u) = \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i^2 > 0$ et donc $H \in \mathcal{V}^+$. Par suite $r(\Phi_Q) \geq \dim H = n^+(Q)$.

③ On a donc $n^+(Q) + n^-(Q) \leq r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) \leq n$. Or Q est inversible, donc 0 n'en est pas une valeur propre ; et Q est diagonalisable, donc a n valeurs propres réelles. Par suite $n^+(Q) + n^-(Q) = n$, ce qui entraine $r(\Phi_Q) = n^+(Q)$ et $s(\Phi_Q) = n^-(Q)$.

④ Soient $H \in \mathcal{V}^+$ de dimension $r(\Phi_Q)$, et $G \in \mathcal{V}^-$ de dimension $s(\Phi_Q)$.
Alors $S \cap H$ est la sphère unité de l'espace de dimension finie H, donc est un compact de H. D'autre part, Φ_Q, en tant que forme quadratique, est continue sur $S \cap H$. Elle atteint donc un minimum m en un point u_1 de $S \cap H$; et, puisque $u_1 \in S \cap H$, on a $m > 0$. Posons $\delta_1 = m/2$.
Supposons $\kappa \leq \delta_1$. Alors, si $x \in S \cap H$, $\Phi_R(x) \geq \Phi_Q(x) - \kappa \|x\|^2 \geq m - m/2 > 0$. Donc Φ_R est strictement positive sur $S \cap H$, et donc $r(\Phi_R) \geq \dim H = r(\Phi_Q)$.
De même, en prenant $\delta_2 = -M/2 > 0$ où M est le maximum de Φ_Q sur $S \cap G$, on montre que $s(\Phi_R) \geq \dim G = s(\Phi_Q)$ si $\kappa \leq \delta_2$.
Prenons alors $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $\kappa \leq \delta$, alors $r(\Phi_R) \geq r(\Phi_Q)$ et $s(\Phi_R) \geq s(\Phi_Q)$. Mais, d'après les questions précédentes, $r(\Phi_R) + s(\Phi_R) = r(\Phi_Q) + s(\Phi_Q) = n$, et donc les inégalités précédentes sont des égalités.

⑤ Supposons $\varphi(\lambda) \geq 0$ pour tout λ. Soit $H = \overrightarrow{(a,b)}$ (de dimension 2 puisque (a,b) est libre), soit $u = \alpha a + \beta b \in H$.
Si $\beta = 0$, alors $\Phi_Q(u) = \alpha^2 \Phi_Q(a) \geq 0$; sinon, $\Phi_Q(u) = \beta^2 \Phi_Q(b + (\alpha/\beta)a) = \beta^2 \varphi(\alpha/\beta) \geq 0$. Donc Φ_Q est positive ou nulle sur H, et donc $H \in \mathcal{V}_0^+$.
Soit alors $G \in \mathcal{V}^-$ de dimension $n - 1 = s(\Phi_Q)$. D'après la question 4, G et H sont en somme directe, alors que la somme de leurs dimensions est strictement plus grande que n : on aboutit donc à une contradiction, φ prend donc obligatoirement des valeurs strictement négatives.

⑥ Puisque $\Phi_Q(a) > 0$, a n'est pas nul. Si (a,b) est liée, on peut donc trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b = \alpha a$. On a alors $B_Q(a,b)^2 = \alpha^2 \Phi_Q(a) = \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$: l'inégalité est vérifiée, et on a égalité.
Supposons maintenant (a,b) libre. Alors $\varphi(\lambda) = \Phi_Q(a)\lambda^2 + 2B_Q(a,b)\lambda + \Phi_Q(b)$ est un trinôme du second degré en λ puisque $\Phi_Q(a) \neq 0$, dans lequel le coefficient de λ^2 est strictement positif, et qui prend des valeurs strictement négatives d'après la question précédente. Son discriminant est donc strictement positif, ce qui donne $B_Q(a,b)^2 > \Phi_Q(a)\Phi_Q(b)$. L'inégalité est donc vérifiée, et on n'a pas égalité.

Fin

Á la prochaine