

Mamouni My Ismail

Devoir Surveillé N°2
Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Samedi 13 Novembre 2010

Durée : 4 heures

Extrait du CCP 2007, MP.

Blague du jour

C'est deux chiens qui discutent :

- C'est quoi ton nom... ?
 - C'est ché
 - Ché? C'est plutôt bizarre comme nom !!
 - Ben pourtant, mon maître qui m'adore beaucoup me dit tout le temps "Va, cher Ché!".
- !!



Euclide (vers -325, vers -265)

Mathématicien de la Grèce antique ayant probablement vécu en Afrique (Alexandrie, Égypte) auteur des ouvrages *Éléments* (13 livres), qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes. Les *Éléments* constituent le plus ancien exemple d'ouvrage traitant de mathématiques axiomatisées, et la première oeuvre rédigée dans un souci de rigueur scientifique et logique. Cela lui confère une place à part dans la littérature scientifique et explique sa notoriété mondiale.

Mathématicien du jour

Les calculatrices sont autorisées.

* * *

NB : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

* * *

Groupes d'isométries sur \mathbb{R}^n

Notations

Dans ce sujet, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire **canonique** sur E : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ où X et Y sont les matrices colonnes des vecteurs x et y dans la base \mathcal{B} (\mathcal{B} est donc une base orthonormale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

- $\mathcal{L}(E)$ la \mathbb{R} -algèbre des endomorphismes de E
- $(GL(E), \circ)$ le groupe des automorphismes de E
- $M_{n,1}(\mathbb{R})$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne
- $M_n(\mathbb{R})$ la \mathbb{R} -algèbre des matrices carrées réelles de taille n
- $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{R})$
- pour une matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, tA est sa matrice transposée
- $O_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices orthogonales, c'est-à-dire des matrices A de $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = I_n$ où I_n est la matrice unité de $M_n(\mathbb{R})$
- $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire des matrices A de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle, ${}^tXAX > 0$.

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels x_1, x_2, \dots, x_n dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme p** sur E :

$$\text{si } x = (x_1, \dots, x_n) \in E, \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme infinie** sur E : si $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Une norme N sur E est dite **euclidienne** s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout $x \in E$, $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$.

Objectifs

Si N est une norme sur E , on dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **N -isométrie** si pour tout $x \in E$, $N(u(x)) = N(x)$.

On note $\text{Isom}(N)$ l'ensemble des N -isométries.

L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\text{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p .

I. Description des normes euclidiennes

1. Identité du parallélogramme

- a. Montrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E , on a

$$(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2[(N(x))^2 + (N(y))^2].$$

En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.

- b. Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis montrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

2. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les

matrices colonnes associées. Montrer que si l'on pose $\langle x, y \rangle_s = {}^t XSY$, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ définit un produit scalaire sur E .

3. Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $(\varphi(e_i, e_j))$. Justifier que pour tous vecteurs x et y de E $\varphi(x, y) = {}^t XSY$ et que $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a donc montré que $\varphi = \langle \cdot, \cdot \rangle_s$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme $N_S : x \mapsto \sqrt{{}^t XSX}$ avec $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x .

II. Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E .

4. Montrer que $(\text{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $GL(E)$.

5. Une caractérisation géométrique des N -isométries

On note $\Sigma(N) = \{x \in E, N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est une N -isométrie si et seulement si $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

Le groupe des N -isométries est donc l'ensemble des endomorphismes laissant stable la N -sphère unité.

6. Dans cette question uniquement $n = 2$ et donc $E = \mathbb{R}^2$.

On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \text{Vect}\{e_1 - e_2\}$ où (e_1, e_2) est la base canonique de \mathbb{R}^2 et r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$ -isométries ?

7. Dans cette question uniquement $n = 3$ et donc $E = \mathbb{R}^3$.

Si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q .

a. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, déterminer une matrice symétrique $S \in M_3(\mathbb{R})$, telle que

$$q(x, y, z) = {}^t XSX.$$

b. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $S = PD^t P$.

c. Justifier alors que l'application $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$ est une norme euclidienne sur \mathbb{R}^3 .

d. Donner l'allure géométrique de ΣN_q , la sphère unité pour la norme N_q et en donner une équation simple dans une nouvelle base.

- è. Justifier que $\Sigma(N_q)$ admet un axe de symétrie, préciser un vecteur qui dirige cet axe
- f. Dédire de la question 5, par une considération géométrique, que $\text{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments.

III. Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base \mathcal{B} .

Si N est une norme, on note $\text{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}}, u \in \text{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\text{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\text{Isom}(N)$, c'est « sa version matricielle ».

8. Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ le produit scalaire associé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que u est une N_S -isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E , on a $\langle u(x), u(y) \rangle_S = \langle x, y \rangle_S$.

b. En déduire que u est une N_S -isométrie si et seulement si sa matrice A dans \mathcal{B} vérifie ${}^tASA = S$.

9. Reconnaitre alors $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$? Justifier votre réponse.

10. Une application des polynômes interpolateurs

$\mathbb{R}_r[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r .

On se donne $r+1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_r$.

On considère l'application linéaire u de $\mathbb{R}_r[X]$ vers \mathbb{R}^{r+1} définie par

$$P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_r)).$$

a. Déterminer le noyau de u . En déduire que pour tous réels y_0, y_1, \dots, y_r , il existe un unique polynôme L de $\mathbb{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).

b. Application : soit n un entier naturel non nul et u_1, \dots, u_n des réels strictement positifs, on pose $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})$. Montrer qu'il existe un polynôme L , à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

11. Racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$

a. Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Déterminer une matrice $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S .

b. Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ une autre racine carrée de S . Montrer qu'il existe un polynôme Q , à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.

c. Montrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.

d. Dédire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A+B)(A-B)$).

Désormais, on note \sqrt{S} l'unique racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$ de S .

12. Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = N_S(x) = \sqrt{{}^t X S X}$ où X est le vecteur colonne associée à x .

a. Montrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, la matrice $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ appartient à $\text{ISOM}(N_S)$.

b. Montrer que l'application ψ de $O_n(\mathbb{R})$ dans $\text{ISOM}(N_S)$ définie par $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection.

Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini?

IV. Étude du cardinal de $\text{Isom}(p)$

Dans cette partie p est un réel **strictement** supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour alléger l'écriture, une **p -isométrie** désigne une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\text{Isom}(p)$ le groupe des p -isométries.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, u^* désigne l'**adjoint** de u pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On rappelle que $u^* \in \mathcal{L}(E)$, est caractérisé par l'égalité suivante : pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$.

13. Endomorphismes de permutation signée

\mathcal{P}_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Soit $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma, \varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $u_{\sigma, \varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$.

a. Montrer que $u_{\sigma, \varepsilon}$ est une p -isométrie.

b. Écrire la matrice de $u_{\sigma, \varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$.

14. Inégalité de Hölder

a. Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

b. En déduire que pour tous vecteurs x et y de E , on a $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Hölder** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

c. Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p -isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice $A = [u]_B$.

15. Montrer que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p$.

16. Une formule clé de dualité

Soit $x \in E$. On note $\Sigma_q = \{z \in E, \|z\|_q = 1\}$.

a. Justifier l'existence du réel $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

b. Justifier que $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p$.

Soit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Montrer que $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_p$ puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x, y \rangle|$.

17. En déduire que si u est une p -isométrie, u^* est une q -isométrie. Donner alors, en justifiant, la

valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q$.

18. On suppose de plus que $p \neq 2$.

a. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des réels dans $[0, 1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$. Montrer avec soin que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, r\}$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b. En déduire que pour tout i et j dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que 2 valeurs différentes que l'on précisera (on rappelle que les a_{ij} sont les coefficients de la matrice d'une p -isométrie).

19. Conclusion

Montrer alors que lorsque $p \neq 2$, $\text{Isom}(p)$ est un groupe fini dont on déterminera le cardinal. On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p .

Commentaire : Les p -isométries pour $p \neq 2$ sont seulement en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini mais compact (pas très difficile à montrer). Sur \mathbb{R}^n , la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.



Bonne Chance