.

Mamouni My Ismail

Corrigé Devoir Surveillé N°2 (Pr Legros)

Espaces vectoriels normés

MP-CPGE Rabat

Blague du jour

- Une souris rencontre sa copine : J'ai décidé de me mettre au régime, lui dit-elle.

- Tu ne manges plus ton fromage gruyère alors ?
- Si, mais je ne mange plus que les trous !

- Comment appelle t-on un chien sans pattes ?

Réponse : On ne l'appelle pas, on va le chercher !

- Comment appelle-t-on une chauve-souris qui a des cheveux ?

Réponse : Une souris.

Guillaume François Antoine de l'Hôpital (1661-1704)

Marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Oucques, de La Chaise, de Le Brau et d'autres lieux, mathématicien français. Il est plus connu pour la règle qui porte son nom. Il est aussi l'auteur du premier livre connu sur le calcul infinitésimal différentiel, publié en 1696, ses textes comportent des conférences de son professeur Jean Bernoulli. C'est d'ailleurs ce dernier qui a donné au marquis toutes les donnes nécessaires pour réaliser le livre au nom de l'Hôpital, dans un le but de le publier sous un nom français, car Bernoulli est Suisse.

Mathématicien du jour

1 Description des normes euclidiennes

1 .

a Si N est une norme euclidienne, associée au produit scalaire φ, et si $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned} N(x+y)^2 + N(x-y)^2 &= \varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) \\ &= \varphi(x,x) + 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) + \varphi(x,x) - 2\varphi(x,y) + \varphi(y,y) \\ &= 2\left(N(x)^2 + N(y)^2\right) \end{aligned}$$

Avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons $||x+y||_\infty^2 + ||x-y||_\infty^2 = 2 \neq 4 = 2\left(||x||_\infty^2 + ||y||_\infty^2\right)$ donc $||\ ||_\infty$ n'est pas une norme euclidienne.

b $||\ ||_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique défini par l'énoncé : c'est donc une norme euclidienne. Supposons maintenant que p est un réel strictement plus grand que 1 et distinct de 2. Toujours avec $x = e_1$ et $y = e_2$, nous avons :

$$||x+y||_p^2 + ||x-y||_p^2 = 2^{2/p} + 2^{2/p} \neq 4 = 2\left(||x||_p^2 + ||y||_p^2\right)$$

car $2/p \neq 1$: la norme $||\ ||_p$ n'est donc pas euclidienne.

2 $<\cdot,\cdot>_S$ est clairement une forme bilinéaire. Nous avons ensuite :
- pour $x, y \in E$, $<x, y>_S = {}^tXSY = {}^t({}^tXSY) = {}^tY{}^tSX = {}^tYSX = <y, x>_S$ donc $<\cdot,\cdot>_S$ est symétrique ;
- pour x non nul, $<x, x>_S$ est strictement positif car $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$: $<\cdot,\cdot>_S$ est définie positive.

3 Pour $x, y \in E$, nous avons :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = {}^tXSY$$

et pour X non nul, associé au vecteur x, ${}^tXSX = \varphi(x, x) > 0$ donc $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2 Quelques généralités et exemples

4 4.Si $u \in \text{Isom}(N)$ et si $x \in \text{Ker}(u)$, $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ donc $x = 0$: u est donc injective et $u \in GL(E)$ (E est de dimension finie).

$\text{Isom}(N)$ est non vide puisqu'il contient l'identité.

Si $u, v \in \text{Isom}(N)$, on a $N(u \circ v(x)) = N(v(x)) = N(x)$ pour tout $x \in E$ et donc $u \circ v \in \text{Isom}(N)$.

Si $u \in \text{Isom}(N)$, on a $N(u^{-1}(x)) = N(u(u^{-1}(x))) = N(x)$ pour tout x, donc $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$.

$\text{Isom}(N)$ est donc un sous-groupe de $GL(E)$.

5 5. Soit $u \in \text{Isom}(N)$. Pour $x \in \Sigma(N)$, $N(u(x)) = N(x) = 1$, donc $u(x) \in \Sigma(N)$: nous avons donc $u(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$. Comme $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$, cela donne également $u^{-1}(\Sigma(N)) \subset \Sigma(N)$, soit $\Sigma(N) \subset u(\Sigma(N))$.

Réciproquement, supposons que $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ et soit x un élément quelconque de E. Si $x = 0$, on a $N(u(x)) = 0 = N(x)$. Sinon, $y = x/N(x) \in \Sigma(N)$, et donc :

$$N(u(x)) = N(u(N(x)y)) = N(x)N(u(y)) = N(x)$$

car $u(y) \in \Sigma(N)$: u est donc une N-isométrie.

6 6. $\Sigma(\|\ \|_1)$ est le carré $\mathcal{C}$ de sommets $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (-1, 0)$ et $D = (0, -1)$, qui est conservé par la symétrie s mais pas par la rotation r, puisque $s(A) = D$, $s(B) = C$, $s(C) = B$, $s(D) = A$ et $r(A) = (1/2, \sqrt{3}/2) \notin \mathcal{C}$. s est donc une $\|\ \|_1$-isométrie mais r n'en est pas une.

7 a $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

b Diagonalisons la matrice symétrique S dans une base orthonormale :

$$\begin{aligned}
\det(S - \lambda I_3) &= \left|\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 2-\lambda & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| \\
&= (2-\lambda)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right| = (2-\lambda)\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right| \\
&= (2-\lambda)^2(4-\lambda)
\end{aligned}$$

4 est valeur propre simple, associée au vecteur propre $e_1 - e_3$. Le plan propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan orthogonal à ce vecteur. Nous obtenons donc facilement une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$

de vecteurs propres :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_3),\ \ \varepsilon_2 = e_2 \text{ et } \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3).$$

Nous pouvons donc écrire $P^{-1}SP = D$, i.e. $S = PD\,{}^tP$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c La matrice S est symétrique définie positive (on peut par exemple écrire que ${}^tXSX = {}^tYDY > 0$ pour $X \neq 0$, avec $Y = {}^tPX$), donc N_q est la norme euclidienne associée au produit scalaire $<\cdot,\cdot>_S$.

d et e Dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $\Sigma(N_q)$ a pour équation :

$$4X^2 + 2Y^2 = 1 - 2Z^2.$$

Pour Z fixé entre $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ l'intersection de $\Sigma(N_q)$ avec le plan horizontal associé est une ellipse.

Pour Z à l'extérieur de l'intervalle $]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}[$, l'intersection de $\Sigma(N_q)$ avec le plan horizontal associé est l'ensemble vide.

Ainsi $\Sigma(N_q)$ a la forme d'un ballon de rugby (ellipsoïde) d'axe de symétrie engendré par le vecteur $\varepsilon_1 = e_1 - e_3$.

f Toutes les rotations autour de l'axe $\mathbb{R}(e_1 - e_3)$ conservent $\Sigma(N_q)$ et sont donc des N_q-isométries : le groupe $\mathrm{Isom}(N_q)$ est infini.

3 Étude de Isom($\mathbf{N}$) lorsque $\mathbf{N}$ est une norme euclidienne

8 a Si u est une N_S-isométrie, les formes bilinéaires symétriques $\varphi_1 : (x, y) \longmapsto < u(x), u(y) >_S$ et $<\cdot,\cdot>_S$ sont associées à la même forme quadratique : elles sont donc égales (formules de polarité).

La réciproque est évidente.

b $u \in \mathrm{Isom}(N_S)$ si et seulement si ${}^t(AX)S(AY) = {}^tXSY$ pour tous $X, Y \in E$, i.e. si et seulement si ${}^tASA = S$ (on peut identifier grâce aux questions 2 et 3).

9 9 En particulier, $A \in \mathrm{ISOM}(\|\ \|_2) \iff {}^tAA = I_n$, donc $\mathrm{ISOM}(\|\ \|_2) = O_n(\mathbb{R})$. Ce groupe est infini, puisqu'il contient par exemple les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 00 \quad 0 \quad I_{n-2} \end{pmatrix}$$

qui sont deux à deux distinctes pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

10 a Si P est dans le noyau de u, P possède $r+1$ racines distinctes et est de degré au plus r : il est donc nul. Ainsi, u est injective, donc surjective ($\mathbb{R}_r[X]$ et $\mathbb{R}^{r+1}$ sont de même dimension finie) : tout vecteur $(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ possède donc un unique antécédent L.

b Soient $x_0, x_1, \ldots, x_r$ tels que $x_0 < x_1 < \cdots < x_r$ et $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. En appliquant la question précédente avec $y_i = \sqrt{x_i}$ (pour $0 \leq i \leq r$), nous obtenons un polynôme L qui convient.

11 a Comme S est symétrique définie positive, il existe une matrice orthogonale P et des réels $\lambda_i > 0$ tels que

$$S = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\,{}^tP$$

Alors la matrice $A = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})\,{}^tP$ est une racine carrée de S (car ${}^tP = P^{-1}$) et est clairement symétrique définie positive.

b Notons $U = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et $V = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, et soit $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L(U) = V$. Nous avons alors :

$$L(B^2) = L(S) = L(PUP^{-1}) = PL(U)P^{-1} = PVP^{-1} = A$$

Le polynôme $Q(X) = L(X^2)$ est donc solution du problème posé.

Nous en déduisons que $AB = X(A)Q(A) = (XQ)(A) = (QX)(A) = Q(A)A = BA$: A et B commutent.

c Soient $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et soit $X \in \mathrm{Ker}\,(S_1 + S_2)$. Alors $S_1X = -S_2X$, et donc $X = 0$ (sinon, on aurait $S_1X > 0$ et $S_2X > 0$). Ainsi, $S_1 + S_2$ est inversible.

d Comme A et B commutent, $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = 0$, ce qui donne $A = B$ car $A + B$ est inversible.

12 12.Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et notons $N = \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$. Alors :

$$\begin{aligned}
N \in \mathrm{ISOM}(N_S) &\iff {}^tNSN = S \\
&\iff {}^t\left(\sqrt{S}\right)\,{}^tM\,{}^t\left(\sqrt{S}\right)^{-1} S \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S} = S \\
&\iff \sqrt{S}\,{}^tM \left(\sqrt{S}\right)^{-1} \left(\sqrt{S}\right)^{2} \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S} = \left(\sqrt{S}\right)^{2} \\
&\iff {}^tM\,M = I_n \\
&\iff M \in O_n(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Comme l'application $M \longmapsto \left(\sqrt{S}\right)^{-1} M\sqrt{S}$ est une bijection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur lui-même, nous en déduisons que sa restriction à $O_n(\mathbb{R})$ est une bijection de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathrm{ISOM}(N_S)$ (c'est même un isomorphisme de groupe).

Ainsi, le groupe des isométries d'une norme euclidienne quelconque N est isomorphe au groupe $O_n(\mathbb{R})$, qui est infini.

Remarque : on obtient ce résultat de façon pratiquement immédiate en utilisant une base orthonormale pour N (deux espaces euclidiens de même dimension n sont isomorphes, donc leurs groupes le sont également).

4 Étude du cardinal de Isom(p)

13 a Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E$. Nous avons $u_{\sigma,\varepsilon}(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ avec $y_{\sigma(i)} = x_i\varepsilon_i$ pour tout i. Nous en déduisons, par changement d'indice :

$$N_p(u_{\sigma,\varepsilon}(x)) = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |y_{\sigma(i)}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} = N_p(x)$$

donc $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

b $u_{\sigma,\varepsilon}(e_1) = e_3$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_2) = e_4$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_3) = -e_1$ et $u_{\sigma,\varepsilon}(e_4) = e_2$ donc la matrice de $u_{\sigma,\varepsilon}$ dans la base (e_i) est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14

a Si a ou b est nul, l'inégalité est évidente. Sinon, la fonction ln étant convexe sur $]0, +\infty[$ et les masses $1/p$ et $1/q$ étant positives de somme 1, nous avons

$$\ln ab = \ln a + \ln b = \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q \leq \ln \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right)$$

ce qui donne l'inégalité demandée, par croissance de la fonction ln.

b Soient $x, y \in E$. Si x ou y est nul, l'inégalité est une nouvelle fois évidente. Sinon, posons

$$x' = \frac{x}{||x||_p} = (x'_1, \ldots, x'_n) \text{ et } y' = \frac{y}{||y||_q} = (y'_1, \ldots, y'_n).$$

Nous avons en utilisant l'inégalité précédente :

$$\frac{|< x, y >|}{||x||_p \, ||y||_q} = |< x', y' >| \leq \sum_{i=1}^{n} |x'_i| \, |y'_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p} |x'_i|^p + \frac{1}{q} |y'_i|^q = \frac{1}{p} \left(||x'||_p\right)^p + \frac{1}{q} \left(||y'||_q\right)^q = 1$$

c Quand $p = 2$, nous obtenons l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x, y \in E$, $|< x, y >| \leq ||x||_2 \, ||y||_2$.

15

15.Pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $||u(e_j)||_p = ||e_j||_p = 1$, i.e. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = 1$, puis en sommant sur j :

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|^p = n.$$

16

a Σ_q est une partie fermée bornée (c'est la sphère unité pour la norme $|| \, ||_q$), elle est donc compacte (E est de dimension finie). Comme l'application $y \longmapsto |< x, y >|$ est continue, elle est bornée sur Σ_q et atteint ses bornes, d'où l'existence du maximum.

b Il suffit d'utiliser l'inégalité de Holdër : $|< x, y >| \leq ||x||_p \, ||y||_q = ||x||_p$ pour tout $y \in \Sigma_q$.

Avec le vecteur y_0 donné par l'énoncé, nous avons :

$$< x, y_0 >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} \underbrace{\frac{\varepsilon_i x_i}{|x_i|}} |x_i|^{p-1} ||x||_p^{1-p} = ||x||_p^{1-p} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} |x_i|^p = ||x||_p^{1-p} \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p = ||x||_p$$

en remarquant que ce résultat est correct même si x est nul !

Si x est non nul, y_0 est élément de Σ_q :

$$\left(||y_0||_q\right)^q = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ x_i \neq 0}} |x_i|^{(p-1)q} \left(||x||_p\right)^{(1-p)q} = \left(||x||_p\right)^{-p} \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p = 1$$

et donc $||x||_p = |< x, y_0 >| \leq \max\limits_{y \in \Sigma_q} |< x, y >|$.

Si $x = 0$, on choisit $y_0 = e_1$ et on a encore $y_0 \in \Sigma_q$ et $0 = ||x||_p = |< x, y_0 >| \leq \max\limits_{y \in \Sigma_q} |< x, y >|$.

Nous avons donc démontré que $\max\limits_{y \in \Sigma_q} \; |< x, y >| = ||x||_p$.

Remarque : ceci traduit que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & < x, \cdot > \end{array}$ est une isométrie quand on munit l'espace E de la norme $|| \, ||_p$ et l'espace E^* de la norme subordonnée à la norme $|| \, ||_q$.

17 17Remarquons tout d'abord que, par symétrie entre p et q, nous avons également :

$$\forall y \in E,\ \max_{x\in\Sigma_p} |< x, y >| = ||y||_q.$$

On suppose que u est une p-isométrie. Soit $z \in \Sigma_q$. Nous avons :

$$\forall x \in \Sigma_p,\ |< x, u^*(z) >| = |< u(x), z >| \leq \max_{y\in\Sigma_q} |< u(x), y >| = ||u(x)||_p = 1$$

et donc

$$||u^*(z)||_q = \max_{x\in\Sigma_p} |< x, u^*(z) >| \leq 1 \qquad (*)$$

Pour tout $z \in E$, nous avons donc $||u^*(z)||_q \leq ||z||_q$ (l'inégalité est évidente si $z = 0$, et s'obtient en appliquant $(*)$ à $z/||z||_q$ si $z \neq 0$).

Comme $u^{-1} \in \text{Isom}(p)$, nous avons ensuite $||(u^{-1})^*(z)||_q \leq ||z||_q$ pour tout $z \in E$. En appliquant cette inégalité à $u^*(z)$, nous obtenons $||z||_q \leq ||u^*(z)||_q$ pour tout $z \in E$, ce qui achève de prouver que u^* est une q-isométrie.

Comme la matrice de u^* dans la base orthonormale (e_i) est la transposée de A, la question 15 donne (il y a toujours symétrie entre p et q) :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{j,i}|^q = n.$$

18 a Nous avons $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} f(\alpha_k) = 0$ en posant $f(x) = x^p - x^q$ (f est définie sur $[0, 1]$, avec par convention $f(0) = 0$). Comme $p \neq q$ (car $p \neq 2$), f est strictement positive sur $]0, 1[$ si $p < 2$ et strictement négative sur $]0, 1[$ si $p > 2$. La somme des $f(\alpha_k)$ ne peut donc être nulle que si les α_k valent tous 0 ou 1.

b Comme $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n = \sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^q$, nous en déduisons que les $|a_{i,j}|$ ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1.

19 19 En poursuivant l'analyse, l'égalité $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|^p = n$ avec $|a_{i,j}| = 0$ ou 1 signifie que la matrice A contient n coefficients non nuls (valant 1 ou -1) et $n^2 - n$ coefficients nuls. Comme A est inversible, deux coefficients non nuls ne peuvent se trouver sur une même ligne ou sur une même colonne. On en déduit que u est de la forme $u_{\sigma,\varepsilon}$ pour un certain $\sigma \in \mathcal{P}_n$ et un certain $\varepsilon \in \{-1, 1\}^n$. Avec la question 13, nous avons donc démontré que le groupe des p-isométrie est égal au groupe des permutations signées. Comme l'application $(\sigma, \varepsilon) \longmapsto u_{\sigma,\varepsilon}$ est injective, $\text{Isom}(p)$ est un groupe fini contenant $2^n n!$ éléments.

À la prochaine