

Devoir Surveillé

# 3 Espaces d'Artin et applications

Blague du jour

Salon de l'auto : Comment reconnaître les nationalités des visiteurs du Mondial de l'Automobile ?

- L'Allemand examine le moteur
- L'Anglais examine le cuir
- Le Grec examine l'échappement
- L'Italien examine le Klaxon



Jacques Salomon Hadamard (1865-1963)

Mathématicien français, connu pour ses travaux en théorie des nombres et en cryptologie. Il entra premier à l'école normale supérieure. C'est Émile Picard qui dirigea ses travaux de recherches.

Son nom est lié à la suite de matrices  $(H_{2^k})$  définie de la façon suivante :  $H_1 = (1)$ ,  $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}$ . Elles sont utilisées dans les codes correcteurs, ou encore pour réaliser les plans d'analyse sensorielle et les plans d'expériences factoriels.

Mathématicien du jour

## Énoncé : Extrait Centrale 2010, MP

Les calculatrices sont autorisées

Notations :

- $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$ .
- On fixe un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 1$ .

### Partie I -

**I.A -** On fixe une application  $\varphi$  de  $E^2$  dans  $\mathbb{K}$ . On suppose que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , c'est-à-dire que, pour tout  $(x, y, z) \in E^3$  et pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $\varphi(x + \alpha y, z) = \varphi(x, z) + \alpha\varphi(y, z)$  et  $\varphi(x, z) = \varphi(z, x)$ .

I.A.1) Pour tout élément  $x$  de  $E$ , on note  $h(x)$  l'application de  $E$  dans  $E$  telle que  $\forall y \in E, h(x)(y) = \varphi(x, y)$ .

- a) Montrer que, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $h(x)$  est élément du dual de  $E$ , noté  $E^*$ .
- b) Montrer que  $h$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E^*$ .

I.A.2) Si  $A$  est une partie de  $E$ , on note  $A^{\perp\varphi} = \{x \in E / \forall a \in A \varphi(x, a) = 0\}$ . Montrer que  $A^{\perp\varphi}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Par la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, on notera  $A^\perp$  au lieu de  $A^{\perp\varphi}$ .

I.A.3) On dit que  $\varphi$  est non dégénérée si et seulement si  $E^{\perp\varphi} = \{0\}$ .

Montrer que  $\varphi$  est non dégénérée si et seulement si  $h$  est un isomorphisme.

I.A.4) Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On note  $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $e$ .

a) Montrer que la matrice de  $h$  dans les bases  $e$  et  $e^*$  est :

$$\text{mat}(h, e, e^*) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

Cette dernière matrice sera également appelée la matrice de  $\varphi$  dans la base  $e$  et notée  $\text{mat}(\varphi, e)$

b) Soit  $(x, y) \in E^2$ . On note  $X$  et  $Y$  les matrices colonnes dont les coefficients sont les composantes de  $x$  et  $y$  dans la base  $e$ .

Montrer que  $\varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y$  où  $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$  et où  ${}^t X$  désigne la matrice ligne obtenue en transposant  $X$ .

**I.B** - Si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , on note  $q_\varphi$  l'application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  définie par :  $\forall x \in E, q_\varphi(x) = \varphi(x, x)$ . On dit que  $q_\varphi$  est la forme quadratique associée à  $\varphi$ . On note  $Q(E)$  l'ensemble des  $q_\varphi$  où  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .

I.B.1) Soit  $q \in Q(E)$ .

Montrer qu'il existe une unique forme bilinéaire symétrique sur  $E$ , notée  $\varphi$ , telle que  $q = q_\varphi$ . On dira que  $\varphi$  est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique  $q$ . On dira que  $q$  est non dégénérée si et seulement si  $\varphi$  est non dégénérée. Si  $e$  est une base de  $E$ , on notera  $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(\varphi, e)$ . On l'appellera la matrice de  $q$  dans la base  $e$ .

I.B.2) Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Soit  $E'$  un second  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , et soit  $q'$  une forme quadratique sur  $E'$ .

On appelle isométrie de  $(E, q)$  dans  $(E', q')$  tout isomorphisme  $f$  de  $E$  dans  $E'$  vérifiant : pour tout  $x \in E, q'(f(x)) = q(x)$ . On dira que  $(E, q)$  et  $(E', q')$  sont isométriques si et seulement si il existe une isométrie de  $(E, q)$  dans  $(E', q')$ .

Montrer que  $(E, q)$  et  $(E', q')$  sont isométriques si et seulement si il existe une base  $e$  de  $E$  et une base  $e'$  de  $E'$  telles que  $\text{mat}(q, e) = \text{mat}(q', e')$ .

I.B.3) Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $c = (c_1, \dots, c_{2p})$  la base canonique de  $\mathbb{K}^{2p}$ .

$$\text{Pour tout } x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{K}^{2p}, \text{ on pose } q_p(x) = 2 \sum_{i=1}^p x_i x_{i+p}.$$

a) Montrer que  $q_p$  est une forme quadratique sur  $\mathbb{K}^{2p}$  et calculer  $\text{mat}(q_p, c)$ .

b) On appelle *espace de Artin* (ou *espace artinien*) de dimension  $2p$  tout couple  $(F, q)$ , où  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $2p$ , et où  $q$  est une forme quadratique sur  $F$  telle que  $(F, q)$  et  $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$  sont isométriques.

Montrer que dans ce cas,  $q$  est non dégénérée.

Lorsque  $p = 1$ , on dit que  $(F, q)$  est un plan artinien.

c) On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et pour tout

$$x = \sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}, \text{ on pose } q(x) = \sum_{k=1}^{2p} x_k^2$$

Montrer que  $(\mathbb{C}^{2p}, q)$  est un espace de Artin.

d) On suppose que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et pour tout

$$x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}, \text{ on pose } q'(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} x_i^2.$$

Montrer que  $(\mathbb{R}^{2p}, q')$  est un espace de Artin.

e) Si  $(F, q)$  est un espace de Artin de dimension  $2p$ , montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel  $G$  de  $F$  de dimension  $p$  tel que la restriction de  $q$  à  $G$  est identiquement nulle.

**Partie II -**

Pour toute la suite de ce problème, on suppose que  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $E$ , et on note  $q$  sa forme quadratique.

**II.A -**

II.A.1) Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On note encore  $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $e$ . Soit  $p \in \{1, \dots, n\}$ . On note  $F$  l'espace engendré par  $e_1, \dots, e_p$ .

a) Montrer que  $F^\perp$  est l'image réciproque par  $h$  de  $\text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ , où  $h$  est définie au I.A.1.

b) Montrer que  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$ .

c) Montrer que  $(F^\perp)^\perp = F$ .

II.A.2) Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

a) Montrer que  $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ .

b) Montrer que  $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ .

II.A.3) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On note  $\varphi_F$  la restriction de  $\varphi$  à  $F^2$ . On dira que  $F$  est singulier si et seulement si  $\varphi_F$  est dégénérée.

Montrer que  $F$  est non singulier si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- $F \cap F^\perp = \{0\}$  ;
- $E = F \oplus F^\perp$  ;
- $F^\perp$  est non singulier.

II.A.4) On dit que deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  de  $E$  sont orthogonaux si et seulement si pour tout  $(x, y) \in F \times G$ ,  $\varphi(x, y) = 0$ .

Si  $F$  et  $G$  sont deux sous-espaces vectoriels de  $E$  orthogonaux et non singuliers, montrer que  $F \oplus G$  est non singulier.

**II.B -** Soit  $q'$  une seconde forme quadratique sur  $E$  dont la forme bilinéaire symétrique associée est notée  $\varphi'$ . Comme au I.A.1, on note, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $h(x)(y) = \varphi(x, y)$  et  $h'(x)(y) = \varphi'(x, y)$ .

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On dit que  $e$  est  $q$ -orthogonale si et seulement si, pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ , avec  $i \neq j$ ,  $\varphi(e_i, e_j) = 0$ .

II.B.1) On suppose que  $E = \mathbb{R}^2$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $q(x, y) = x^2 - y^2$  et  $q'(x, y) = 2xy$ .

Déterminer une base  $q$ -orthogonale et une base  $q'$ -orthogonale.

II.B.2) Existe-t-il une base de  $\mathbb{R}^2$  orthogonale pour  $q$  et pour  $q'$  définies à la question II.B.1 ?

II.B.3) Supposons que  $e$  est à la fois  $q$ -orthogonale et  $q'$ -orthogonale.

Montrer que, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $e_i$  est un vecteur propre de  $h^{-1} \circ h'$ .

II.B.4) On suppose que  $h^{-1} \circ h'$  admet  $n$  valeurs propres distinctes.

Montrer qu'il existe une base de  $E$  orthogonale à la fois pour  $q$  et pour  $q'$ .

**II.C -**

II.C.1) Soit  $x \in E$  tel que  $q(x) = 0$  et tel que  $x \neq 0$ .

On se propose de démontrer qu'il existe un plan  $\Pi \subset E$  contenant  $x$  et tel que  $(\Pi, q|_\Pi)$  soit un plan artinien (où  $q|_\Pi$  désigne la restriction de l'application  $q$  au plan  $\Pi$ ).

a) Démontrer qu'il existe  $z \in E$  tel que  $\varphi(x, z) = 1$

b) On pose  $y = z - \frac{q(z)}{2}x$ . Calculer  $q(y)$ .

c) Conclure.

II.C.2) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel singulier de  $E$ . On suppose que  $(e_1, \dots, e_s)$  est une base de  $F \cap F^\perp$ . On note  $G$  un supplémentaire de  $F \cap F^\perp$  dans  $F$ .

a) Montrer que  $G$  est non singulier.

b) Démontrer par récurrence sur la dimension de  $F \cap F^\perp$  (en commençant par  $\dim(F \cap F^\perp) = 1$ , puis  $\dim(F \cap F^\perp) > 1$ ) qu'il existe  $s$  plans  $P_1, \dots, P_s$  de  $E$  tels que les trois propriétés suivantes soient vérifiées :

- 1) Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $(P_i, q/P_i)$  est un plan artinien contenant  $e_i$
- 2) Pour tout  $(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2$  avec  $i \neq j$ ,  $P_i$  est orthogonal à  $P_j$ .
- 3) Pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ ,  $P_i$  est orthogonal à  $G$ .

II.C.3) Montrer que  $\bar{F} = G \oplus P_1 \oplus \dots \oplus P_s$  est non singulier.

On dira que  $\bar{F}$  est un complété non singulier de  $F$ .

II.C.4) Montrer que si  $q/F = 0$ , alors  $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$ .

II.C.5) On suppose que  $n = 2p$ . Montrer que  $(E, q)$  est un espace de Artin si et seulement si il existe un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  de dimension  $p$  tel que  $q/F = 0$ .

### Partie III -

On note  $O(E, q)$  l'ensemble des isométries de  $(E, q)$  dans lui-même, c'est-à-dire l'ensemble des automorphismes  $f$  de  $E$  vérifiant :

$$\text{pour tout } x \in E, q(f(x)) = q(x).$$

#### III.A -

III.A.1) Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ .

a) Montrer que  $f \in O(E, q)$  si et seulement si, pour tout  $(x, y) \in E^2$  :  $\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$ .

Montrer que si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et si  $f \in O(E, q)$ , alors  $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$ .

b) Soit  $e$  une base de  $E$ . Calculer la matrice de la forme bilinéaire :

$$(x, y) \mapsto \varphi(f(x), f(y)) \text{ en fonction de } \text{mat}(f, e) \text{ et de } \text{mat}(\varphi, e).$$

c) Posons  $M = \text{mat}(f, e)$  et  $\Omega = \text{mat}(\varphi, e)$ .

Montrer que  $f \in O(E, q)$  si et seulement si  $\Omega = {}^t M \Omega M$ .

d) Montrer que si  $f \in O(E, q)$ , alors  $\det(f) \in \{1, -1\}$ . On notera :

$$O^+(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = 1\} \text{ et } O^-(E, q) = \{f \in O(E, q) / \det(f) = -1\}.$$

III.A.2) Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $E = F \oplus G$ . On note  $s$  la symétrie par rapport à  $F$  parallèlement à  $G$ .

a) Montrer que  $s \in O(E, q)$  si et seulement si  $F$  et  $G$  sont orthogonaux (pour  $\varphi$ ).

b) En déduire que les symétries de  $O(E, q)$  sont les symétries par rapport à  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ , où  $F$  est un sous-espace non singulier de  $E$ .

c) Lorsque  $H$  est un hyperplan non singulier, on appellera réflexion selon  $H$  la symétrie par rapport à  $H$  parallèlement à  $H^\perp$ . Montrer que toute réflexion de  $E$  est un élément de  $O^-(E, q)$ .

d) Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $q(x) = q(y)$  et  $q(x - y) \neq 0$ .

On note  $s$  la réflexion selon  $H = \{x - y\}^\perp$ . Montrer que  $s(x) = y$ .

III.B.3) Soit  $f \in O(E, q)$ . On suppose que pour tout  $x \in E$  tel que  $q(x) \neq 0$ , on a  $f(x) - x \neq 0$  et  $q(f(x) - x) = 0$ .

On se propose de démontrer que  $f \in O^+(E, q)$  et que  $E$  est un espace de Artin.

a) Montrer que  $\dim(E) \geq 3$ .

b) On note  $V = \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ . Montrer que  $q/V = 0$ .

c) Soit  $x \in E$  tel que  $q(x) = 0$ . Notons  $H = \{x\}^\perp$ . Montrer que  $q/H$  n'est pas identiquement nulle.

En déduire qu'il existe  $y \in E$  tel que  $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$ .

- d) On note  $U = \text{Im}(f - \text{Id}_E)$ . Montrer que  $q/U = 0$ .
- e) Montrer que  $U^\perp = V = U$ .
- f) En déduire que  $E$  est un espace de Artin et que  $f \in O^+(E, q)$ .

### Partie IV -

**IV.A -** On souhaite démontrer le *théorème de Cartan-Dieudonné*, dont voici l'énoncé : « si  $f \in O(E, q)$ ,  $f$  est la composée d'au plus  $n$  réflexions, où  $n = \dim(E)$ , en convenant que  $\text{Id}_E$  est la composée de 0 réflexion.»

IV.A.1) Montrer le théorème de Cartan-Dieudonné lorsque  $n = 1$ . On veut ensuite raisonner par récurrence. On suppose donc que  $n > 1$  et que le théorème de Cartan-Dieudonné est démontré en remplaçant  $E$  par tout espace vectoriel de dimension  $n - 1$ .

IV.A.2) Conclure lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que  $f(x) = x$  avec  $q(x) \neq 0$ .

IV.A.3) Conclure lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que  $q(x) \neq 0$  et  $q(f(x) - x) \neq 0$ .

IV.A.4) Conclure dans les autres cas.

**IV.B -** On se propose de démontrer le *théorème de Witt*, dont voici l'énoncé : « soient  $F$  et  $F'$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$  tels qu'il existe une isométrie  $f$  de  $(F, q|_F)$  dans  $(F', q|_{F'})$  (la définition d'une isométrie a été donnée au I.B.2). Alors il existe  $g \in O(E, q)$  telle que  $g|_F = f$ . »

IV.B.1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où  $F$  et  $F'$  sont non singuliers.

IV.B.2) On suppose que  $F$  et  $F'$  sont non singuliers, avec  $\dim(F) = \dim(F') = 1$ . Soit  $x \in F$  avec  $x \neq 0$ . Posons  $y = f(x)$ .

a) Montrer que  $q(x + y)$  ou  $q(x - y)$  est non nul.

b) Montrer le théorème de Witt dans ce cas, en utilisant la question III.A.2-d).

IV.B.3) On suppose maintenant que  $F$  et  $F'$  sont non singuliers, avec  $\dim(F) = \dim(F') > 1$ .

a) Montrer qu'il existe  $F_1$  et  $F_2$  non singuliers, tels que  $F_1 \perp F_2$  et  $F = F_1 \oplus F_2$ , avec  $\dim(F_1) = \dim(F) - 1$ .

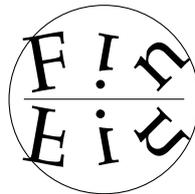
b) Supposons qu'il existe  $g \in O(E, q)$  telle que  $g|_{F_1} = f|_{F_1}$ . Notons  $F'_1 = f(F_1)$ . Montrer que  $f(F_2) \subset F'^{\perp}_1$  et que  $g(F_2) \subset F'^{\perp}_1$ .

c) Montrer qu'il existe

$$h \in O(F'^{\perp}_1, q|_{F'^{\perp}_1}) \text{ telle que } h|_{g(F_2)} = (f \circ g^{-1})|_{g(F_2)}.$$

d) Montrer qu'il existe  $k \in O(E, q)$  telle que  $k|_F = f$ .

IV.B.4) Démontrer le théorème de Witt.



À la prochaine