PROBLÈME II

Source : Concours 2003, Banque Filière PT

Partie III

Dans toute cette partie, on considère un intervalle fermé I et une fonction f définie sur I à valeurs dans I et qui vérifie, pour tout $x \in I$ et tout $y \in I$,

$$\left|f(x) - f(y)\right| \leq k|x - y|$$

où k est une constante strictement inférieure à 1.

On dit dans ce cas que la fonction f est contractante sur I.

1. Montrer que la fonction f est continue sur I.
2. Montrer que si x_1 et x_2 sont deux réels vérifiant
$$f(x_1) = x_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = x_2,$$
alors $x_1 = x_2$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence
$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite appartient à I.
4. Montrer qu'il existe un unique réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.

Partie IV

Dans toute cette partie, on considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.

On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$.

On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que
$$\forall (x, y) \in B, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}.$$
3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,
$$\left|g(x, y') - g(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}|y - y'|.$$
4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $I \times [b - r, b + r] \subset U$ et tel que
$$\forall x \in I, \qquad \left|g(x, b) - g(a, b)\right| \leq \frac{r}{2}.$$

5. Déduire des deux dernières inégalités que
$$\forall (x,y) \in I \times [b-r, b+r], \qquad g(x,y) \in [b-r, b+r].$$
6. Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \longmapsto g(x,y)$ est une application contractante sur $[b-r, b+r]$.
7. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b-r, b+r]$ tel que $f(x,y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$ et on admet que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
8. Calculer la dérivée de l'application $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ sur I. En déduire l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f.

Partie V

Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x,y) \in U, f(x,y) = 0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$.

1. Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b) = 0$ et tel que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.
   (a) Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) et contenu dans U, un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a et une application φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I tels que
   $$\big((x,y) \in V,\ f(x,y) = 0\big) \iff \big(x \in I, y = \varphi(x)\big).$$
   (b) Montrer que si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y) = 0$, alors
   $$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$
   (c) La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose maintenant que le point (a,b) vérifie $f(a,b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Montrer que l'implication de la question V1b est encore vraie.

Partie VI

Trouver le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé (On pourra utiliser les résultats de la partie V).

Partie VII

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :
$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\Big\}$$
$$\widetilde{D} = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2x^2 + y^2 - 2y < 1\Big\}$$
On remarquera que D est un ensemble fermé et que $\tilde{D}$ est un ensemble ouvert.

1. Dessiner sommairement l'ensemble D.
2. Montrer que l'ensemble D est borné.
3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par
   $$f(x,y) = x^2 e^y.$$
   Montrer que F admet un maximum global et un minimum global sur D.
4. Chercher les extrema locaux de F sur $\widetilde{D}$.
5. Déterminer les extrema globaux de F sur D.

$\boxed{\text{Fin} \quad \text{Bonne chance}}$