XM6-CPGE My Youssef

Devoir Libre

Équations différentielles

Rabat le 26 mars 2010

EPITA 2007 - mathématiques 1

On considère dans ce problème deux fonctions $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qu'on suppose de classe C^1.
On étudie ici un algorithme d'approximation de la solution y de l'équation différentielle linéaire du premier ordre (E) : $y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$ qui vérifie la condition $y(0) = y_0$ où $y_0 \in \mathbb{C}$.

Pour obtenir une approximation de $y(T)$ pour un réel donné $T \neq 0$, on introduit un entier $N \geq 1$ et la subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ du segment $[0, T]$, où $t_k = \frac{kT}{N}$ $(0 \leq k \leq N)$.
On définit alors une suite finie $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$ par les formules suivantes :

$$(1) \qquad \forall\, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N}\,(a(t_k)\, y_k + b(t_k)).$$

(On a obtenu celles-ci en remplaçant dans (E) $y'(t_k)$ par le taux d'accroissement $\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k}$).

■ Partie I

Dans cette partie, on étudie le cas où les deux fonctions a et b sont des constantes *réelles*.
On étudie donc la solution y du problème de Cauchy suivant (avec $y_0 \in \mathbb{R}$) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a\, y(t) + b \qquad \text{et} \qquad y(0) = y_0.$$

Dans ce cas, la suite finie $y_0 = y(0), y_1, \dots, y_N$ est donnée par les formules suivantes :

$$(2) \qquad \forall\, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{T}{N}\,(a\, y_k + b).$$

1°) *Etude de l'algorithme*
a) Ecrire l'algorithme permettant d'obtenir y_N quand a, b, y_0, T et l'entier N sont donnés.
b) Préciser en fonction de N le nombre global d'opérations +, –, × et / effectuées.

2°) *Etude d'un cas particulier* ($y'(t) = y(t)$)
On suppose que $a = 1$ et $b = 0$, donc que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = y(t)$.
a) Résoudre l'équation différentielle et préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
b) Préciser l'expression de y_N et montrer que $\lim_{N \to +\infty} y_N = y(T)$.
c) Donner un équivalent de $y(T) - y_N$ quand N tend vers $+\infty$.

3°) *Etude du cas général* ($y'(t) = a\, y(t) + b$)
On suppose que $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, donc que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = a\, y(t) + b$.
a) Résoudre l'équation différentielle et préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
b) Déterminer y_k pour $0 \leq k \leq N$ à l'aide de la suite auxiliaire $z_k = y_k + \frac{b}{a}$.
c) Préciser l'expression de y_N et montrer que $\lim_{N \to +\infty} y_N = y(T)$.
d) Donner un équivalent de $y(T) - y_N$ quand N tend vers $+\infty$.

■ Partie II

Dans cette partie, on étudie le cas où les deux fonctions a et b sont des constantes *complexes*.
On étudie la solution y du problème de Cauchy suivant (avec $y_0 \in \mathbb{C}$) :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a\, y(t) + b \qquad \text{et} \qquad y(0) = y_0.$$

Les candidats veilleront dans cette partie à ne pas écrire de logarithme de nombres complexes.

4°) *Etude d'un cas particulier* ($y'(t) = i\, y(t)$)
On suppose que $a = i$ et $b = 0$, donc que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = i\, y(t)$.
a) Préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
b) Préciser le module r_N du complexe $1 + i\,\frac{T}{N}$, puis déterminer $\lim_{N\to+\infty} (r_N)^N$.
Montrer que le complexe $1 + i\,\frac{T}{N}$ admet un argument θ_N compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.
Vérifier que $\theta_N = \mathrm{Arctan}\big(\frac{T}{N}\big)$, puis déterminer $\lim_{N\to+\infty} N\,\theta_N$.
c) Préciser l'expression de y_N et montrer que $\lim_{N\to+\infty} y_N = y(T)$.

5°) *Un résultat préliminaire*
a) Etablir que $\frac{1}{N^k}\binom{N}{k} \le \frac{1}{k!}$ si k et N sont deux entiers naturels tels que $k \le N$.
En déduire l'inégalité suivante pour tout nombre complexe z donné :

$$\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N \right| \le \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{N^k}\binom{N}{k} \right) |z|^k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|z|^k}{k!}.$$

b) Etablir que $\left| e^z - \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N \right| \le e^{|z|} - \left(1 + \frac{|z|}{N}\right)^N$, et que $\lim_{N\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{N}\right)^N = e^z$.

6°) *Etude du cas général* ($y'(t) = a\, y(t) + b$)
On suppose que $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$, et que l'équation différentielle s'écrit $y'(t) = a\, y(t) + b$.
a) Résoudre l'équation différentielle et préciser $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
(On remarquera que l'équation est équivalente à $(e^{-a\,t}\, y(t))' = b\, e^{-a\,t}$, et on intégrera).
b) Préciser l'expression de y_N à l'aide des formules (2) et montrer que $\lim_{N\to+\infty} y_N = y(T)$.

■ Partie III

On revient au cas général et on étudie donc la solution y du problème de Cauchy suivant :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t) \qquad \text{et} \qquad y(0) = y_0.$$

Dans ce cas, la suite finie $y_0 = y(0),\ y_1,\ \ldots,\ y_N$ est donnée par les formules précédentes (1).

7°) *Etude du cas où a est la fonction nulle* ($y'(t) = b(t)$)
On suppose que l'équation différentielle se réduit à $y'(t) = b(t)$.
a) Préciser à l'aide d'une intégrale l'expression de $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).
b) Montrer à l'aide des formules (1) que y_N est donné par la relation suivante :

$$y_N = y_0 + \frac{T}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b\left(\frac{kT}{N}\right).$$

En reconnaissant une somme de Riemann, en déduire que $\lim_{N\to+\infty} y_N = y(T)$.

8°) *Etude du cas où b est la fonction nulle* ($y'(t) = a(t)\,y(t)$)

On suppose que l'équation différentielle se réduit à $y'(t) = a(t)\,y(t)$, avec a à valeurs réelles.

a) Préciser à l'aide d'une intégrale l'expression de $y(T)$ (sachant que $y(0) = y_0$).

b) On considère la suite (p_N) définie pour $N \geq 1$ par :

$$p_N = \prod_{k=0}^{N-1} \left(1 + \frac{T}{N}\, a\left(\frac{k\,T}{N}\right)\right).$$

- Etablir, lorsque N est assez grand, qu'on a : $\forall\, k \in 0,1, \ldots, N\!-\!1\}$, $\left|\frac{T}{N}\, a\left(\frac{k\,T}{N}\right)\right| \leq \frac{1}{2}$.
- Etablir l'inégalité $x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x$ pour tout nombre réel $x \geq -\frac{1}{2}$.
- En déduire un encadrement de $\ln(p_N)$ et les limites de $\ln(p_N)$ et p_N quand N tend vers $+\infty$.

c) Préciser l'expression de y_N à l'aide des formules (1) et montrer que $\lim_{N \to +\infty} y_N = y(T)$.

9°) *Une majoration préliminaire*

On considère des réels strictement positifs α et β, et une suite réelle (e_k) vérifiant $e_0 = 0$ et :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad e_{k+1} \leq (1+\alpha)\, e_k + \beta.$$

On lui associe la suite réelle (u_k) définie par $u_0 = 0$, puis par $u_{k+1} = (1+\alpha)\, u_k + \beta$.

a) Déterminer la limite éventuelle L de la suite (u_k), puis préciser l'expression de u_k.

b) Etablir l'inégalité $e_k \leq u_k$ pour tout entier naturel k, et en déduire qu'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$e_k \;\leq\; \frac{\beta}{\alpha}\,((1+\alpha)^k - 1) \;\leq\; \frac{\beta}{\alpha}\,(e^{k\,\alpha} - 1).$$

10°) *Convergence de la méthode d'Euler*

On étudie le cas général de l'équation différentielle $y'(t) = a(t)\,y(t) + b(t)$.

a) Montrer que la solution y vérifiant $y(0) = y_0$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

b) Etablir que la solution y vérifie la relation suivante pour $0 \leq k < N$:

$$y(t_{k+1}) \;=\; \left(1 + \frac{T}{N}\, a(t_k)\right) y(t_k) + \frac{T}{N}\, b(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)\, y''(t)\, dt.$$

c) Etablir à l'aide de la relation (1) qu'on a alors pour $0 \leq k < N$:

$$y(t_{k+1}) - y_{k+1} \;=\; \left(1 + \frac{T}{N}\, a(t_k)\right)(y(t_k) - y_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)\, y''(t)\, dt.$$

On pose $A = \max_{|t| \leq |T|} |a(t)|$ et $M_2 = \max_{|t| \leq |T|} |y''(t)|$.

En notant $e_k = |y(t_k) - y_k|$, en déduire l'inégalité suivante pour $0 \leq k < N$:

$$e_{k+1} \;\leq\; \left(1 + \frac{A\,|T|}{N}\right) e_k + \frac{M_2\, T^2}{2\, N^2}.$$

d) Déduire des résultats précédents une majoration de $e_N = |y(T) - y_N|$, puis conclure.

Fin