XM6-CPGE My Youssef

Devoir Libre

Équations différentielles

Rabat le 25 mars 2010

Blague du jour :
• Que signifie le sigle B.U.S.H ?
-Réponse : Bombarder Uniquement Saddam Hussein ....
• Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !
Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"

Mathématiciens du jour **La famille des Riccati**
Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

Remerciements : à Michel Quercia (Dijon) pour la source latex de ces problèmes.

Pb 1

Exemple d'une étude qualitative.
On considère l'équationn différentielle (E) : $x' = x^2 - t$ et l'ensemble $D_0 = \{(t, x) \mid x^2 - t < 0\}$. Soit x est une solution de (E) vérifiant $(t_0, x(t_0)) \in D_0$.

1) Supposons $\exists t > t_0$ tel que $x^2(t) - t \geq 0$.
   a) Montrer que $t_1 = \min\{t > t_0 \mid x^2(t) - t > 0\}$ existe, puis que $x^2(t_1) - t_1 = 0$.
   b) En déduire que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.
   c) Si $x(t_1) = \sqrt{t_1}$, étudier la fonction $y(t) = x(t) - \sqrt{t}$ puis en déduire une contradiction.
   d) Si $x(t_1) = -\sqrt{t_1}$, de façon pareille en déduire une contradiction.

2) En déduire que la courbe intégrale reste dans D_0.

3) Supposons que la solution maximale (à droite) est définie sur $[t_0, \beta[$, avec $\beta \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que pour tout $t \in [t_0, \beta[$, on a $-\beta \leq x'(t) \leq 0$.
   b) En déduire que x' est intégrable sur $[t_0, \beta[$, puis que $x(t)$ admet une limite finie quand t tend vers β.
   c) En déduire une contradiction.

4) Conclure que $\beta = +\infty$.

5) En remarquant que pour tout $t \geq t_0$, on a $x'(t) < 0$, montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = -\infty$.

6) En déduire que $x''(t) \geq 0$ à partir d'un certain rang, puis que $\lim\limits_{t \to +\infty} x'(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

7) On suppose que $\ell \neq 0$.
   a) Montrer que $x(t) \sim \ell t$, puis que puis et $x'(t) \sim \ell^2 t^2$.
   b) En déduire que $x'''(t_2) = 2x + \dfrac{1}{2x^2}$ qui est négatif pour t assez grand
   c) En déduire une contradiction.

8) En déduire que $x(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} -\sqrt{t}$.

Pb 2

Étude d'un système autonome de taille 2.

$$\text{Soit } n > 0 \text{ et } (S) : \begin{cases} x'(t) = \dfrac{2}{n} x(t) y(t) \\ y'(t) = -x^2(t) + y^2(t). \end{cases}$$

1) Soit $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ une solution de (S). Trouver d'autres solutions présentant une symétrie avec γ.
Indication: $\gamma_1(t) = (-x(t), y(t))$ et $\gamma_2(t) = \ldots$ sont aussi solutions de (S).

2) Montrer que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = 0$ alors $x(t) = 0$ pour tout t.

3) De même, montrer que s'il existe t_0 tel que $x(t_0) = y(t_0) = 0$ alors $x(t) = y(t) = 0$ pour tout t.

4) En déduire que pour λ, μ non nuls et x ne s'annulant pas, $\sigma : t \mapsto \lambda(x(\mu t), y(\mu t))$ est solution de (S) si et seulement si $\mu = \lambda$.

5) En déduire des symétries des solutions maximales de (S).

6) En déduire que toute trajectoire maximale qui touche l'axe des x est symétrique par rapport cet axe.

7) On se propose de déterminer les courbes du plan formes des points (x_0, y_0) où les solutions de (S) ont des tangentes parallèles aux axes (Ox) et (Oy).

a) Montrer que si on a $x(t_0) = 0$, alors $x(t) = 0$ pour tout t et $y(t)$ est arbitraire.

b) Montrer que si on a $y(t_0) = 0$, alors $x(t_0) = 0$ est arbitraire.

c) En déduire que l'ensemble des points où la tangente est verticale est la réunion des deux axes (Ox) et (Oy) privée de $(0,0)$.

d) Avec un raisonnement pareil, montrer que l'ensemble des points où la tangente horizontale est la réunion des deux bissectrices des axes, privée de $(0,0)$.

e) En déduire quelques solutions particulières.
Indication: $x(t) = 0, y(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$.

8) On suppose qu'il existe $\Phi : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ vérifie $y(t) = \Phi(x(t))$.

a) Montrer que $\dfrac{2}{n} x\psi' = \psi - x^2$ avec $\psi = \Phi^2$.

b) En déduire que $\psi(x) = |x|^n \left(\lambda + \dfrac{n}{(n-1)x}\right)$ si $n \neq 1$ et $\psi(x) = |x|(\lambda - \ln|x|)$ si $n = 1$.

c) Montrer que pour une courbe intégrale qui ne touche aucun des deux axes, on peut exprimer y en fonction de x
Indication: $x'(t) \neq 0$, donc $t \mapsto x(t)$ injective.

d) Montrer qu'une courbe intégrale qui touche l'axe des y est incluse dans cet axe.

e) Montrer que pour une courbe intégrale qui touche l'axe des x en dehors de $(0,0)$, on a :
$$y(x) = \Phi(x) = \pm\sqrt{\psi(x)}.$$

f) En déduire toutes les courbes intégrales.