

Devoir Libre

19 Équations différentielles : Exemple d'étude.

Blague du jour

☛ Que signifie le sigle B.U.S.H ?
 -Réponse : Bombarde Uniquement Saddam Hussein
 ☛ Les Irakiens sont dans la rue et crient : A bas Clinton, à bas Clinton !
 Un autre Irakien intervient et dit aux manifestants : Ce n'est plus Clinton le président, c'est Bush.
 Les manifestants répondent : Mais ça n'a aucun sens ! On ne va tout de même pas crier "A babouche ! A babouche !"



La famille des Riccati

Jacopo Francesco Riccati (1676-1754) était un physicien et mathématicien italien, père de Vincenzo Riccati et de Giordano Riccati. Ses travaux en hydraulique (canaux de Venise) et en acoustique le conduisent à résoudre des équations différentielles du second ordre en les réduisant au 1er ordre et plus généralement à rechercher des méthodes de séparation des variables afin d'obtenir les solutions par simples quadratures. Ses travaux furent publiés après sa mort par ses fils à partir de 1764 sous le titre Opere del conte Jacopo Riccati.

Mathématicien du jour

☒ Énoncé : CNC 2004, MP

Définitions et notations

Dans tout le problème, par "solution d'une équation différentielle", on fait référence aux solutions à valeurs réelles définies sur \mathbb{R} .

Si f est une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs réelles, on lui associe l'équation différentielle

$$y' - y + f = 0. \quad (\mathcal{E}_f)$$

Le but du problème est d'étudier des conditions d'existence de solutions bornées de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) , et lorsque ces con-

ditions sont remplies, certaines propriétés de ces solutions sont ensuite étudiées.

I. EXEMPLES ET RÉSULTATS GÉNÉRAUX

① Un premier exemple

Soient α un réel et f_α la fonction $x \mapsto e^{\alpha x}$.

- ① Résoudre l'équation différentielle (\mathcal{E}_{f_1}) . Cette équation possède-t-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$?
- ② Ici on suppose que $\alpha \neq 1$.
 - ① Résoudre l'équation différentielle (\mathcal{E}_{f_α}) .

- ② À quel condition nécessaire et suffisante sur α cette équation admet-elle des solutions bornées au voisinage de $+\infty$? Lesquelles?
- ③ L'équation différentielle (\mathcal{E}_{f_α}) admet-elle des solutions bornées sur \mathbb{R} ?

② Résultats généraux

- ① Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) ?
- ② Montrer que les solutions de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) sont de la forme

$$y_\lambda : x \mapsto e^x \left(\lambda - \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

- ③ On suppose que la solution y_λ est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer alors que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est convergente et vaut λ .
- ④ Combien de solutions bornées au voisinage de $+\infty$ l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) peut-elle avoir au maximum?
- ⑤ On suppose maintenant que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est convergente et on pose

$$\lambda_f = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \quad \text{et} \quad Y_f = y_{\lambda_f}.$$

- ① Vérifier que, pour tout réel x , $Y_f(x) = e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$.

- ② La solution Y_f est-elle nécessairement bornée au voisinage de $+\infty$?
- ⑥ On suppose ici que f est bornée.
- ① Montrer que Y_f est bien définie et que c'est l'unique solution bornée, sur \mathbb{R} , de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) .
- ② Si en outre f tend vers 0 en $+\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $+\infty$.
- ③ Si maintenant f tend vers 0 en $-\infty$, montrer que Y_f possède une limite nulle en $-\infty$.

③ Un autre exemple

On pose

$$u_{n,p}(x) = (-1)^p \frac{(2p+2)^n x^n}{(2p+1)! n!}, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (n,p) \in \mathbb{N}^2.$$

- ① Montrer que, pour tout réel x , la suite double $(u_{n,p}(x))_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.
- ② En déduire le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}$, où

$$a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{(2p+2)^n}{(2p+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dans la suite on pose $u(x) = e^x \sin(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- ③ Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} u(t) dt$ est convergente.

- ④ Montrer que, pour tout réel x , $\int_x^{+\infty} e^{-t} u(t) dt = \int_{e^x}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} d\theta$
- ⑤ En faisant une intégration par partie dans l'intégrale du second membre de l'égalité précédente, montrer que la solution Y_u de l'équation différentielle (\mathcal{E}_u) est bornée sur \mathbb{R} .

II. CAS D'UNE FONCTION INTÉGRABLE

A- Cas où f est intégrable sur \mathbb{R}

On suppose que f est intégrable sur \mathbb{R} et on pose, pour tout réel x ,

$$G(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

- ① Montrer que la fonction G est continue, bornée et tend vers 0 en $-\infty$.
- ② Montrer que, pour tout réel x , la fonction $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $[x, +\infty[$.
- ③ Montrer alors que la solution Y_f de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, |Y_f(x)| \leq \int_x^{+\infty} |f(t)| dt,$$

puis en déduire que Y_f est bornée sur \mathbb{R} et tend vers 0 en $+\infty$.

- ④ Montrer que $Y_f = -G + Y_G$ et conclure que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.
- ⑤ Justifier que la solution $Y_{|f|}$ de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_{|f|})$ est bornée et tend vers 0 en $\pm\infty$.

- ⑥ Montrer alors que $Y_{|f|}$ est intégrable sur \mathbb{R} .
- ⑦ En déduire que Y_f est intégrable sur \mathbb{R} et montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y_f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt.$$

- ⑧ On désigne par E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues et intégrables sur \mathbb{R} ; on le muni de la norme N_1 définie, pour tout élément g de E , par

$$N_1(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt.$$

Montrer que l'application $\Phi : g \mapsto Y_g$ est un endomorphisme continu de E et calculer sa norme.

B- Cas où l'intégrale de f sur \mathbb{R} converge

On suppose ici que f possède une intégrale convergente sur \mathbb{R} et on pose, pour tout réel x ,

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt.$$

- ① Montrer que la fonction F est continue, bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
- ② Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$ est convergente et que

$$e^x \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt = F(x) - Y_F(x).$$

(on pourra faire une intégration par partie)

- ③ En déduire que la solution Y_f de l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) est bornée et tend vers 0 en $+\infty$.
- ④ Montrer que Y_f tend vers 0 en $-\infty$.
- ⑤ Montrer alors que Y_f possède une intégrale convergente sur \mathbb{R} , égale à celle de f .

III. CAS D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

On suppose ici que f est 2π -périodique.

- ① Montrer que l'équation différentielle (\mathcal{E}_f) possède une unique solution bornée qui est la fonction Y_f .
- ② Montrer que Y_f est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 .
- ③ Calculer les coefficients de FOURIER complexes de Y_f en fonction de ceux de f .
- ④ On pose $f_0 = f$ et $f_{n+1} = Y_{f_n}$, $n \geq 0$.
 - ① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer les coefficient de FOURIER complexes de f_n en fonction de ceux de f_1 .

- ② Montrer que la série de FOURIER de f_1 est normalement convergente.

- ③ En déduire la convergence de la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|)$.

- ④ En utilisant le théorème de DIRICHLET, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - c_0(f)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (|c_{-k}(f_1)| + |c_k(f_1)|)$$

- ⑤ Quelle conclusion concernant le mode de convergence de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut-on tirer de ce qui précède?



À la prochaine